

IDŐSOROK ELEMZÉSE – I:

Frekvenciaelemzés

Bódizs Róbert

MAGATARTÁSTUDOMÁNYI INTÉZET

Az egészségtudományok módszertana – II.

2022. 03. 02.



*Oktatás, kutatás,
gyógyítás: 250 éve az
egészség szolgálatában*

Mottóm:

Appok helyett módszereket

Rutinok helyett megértést

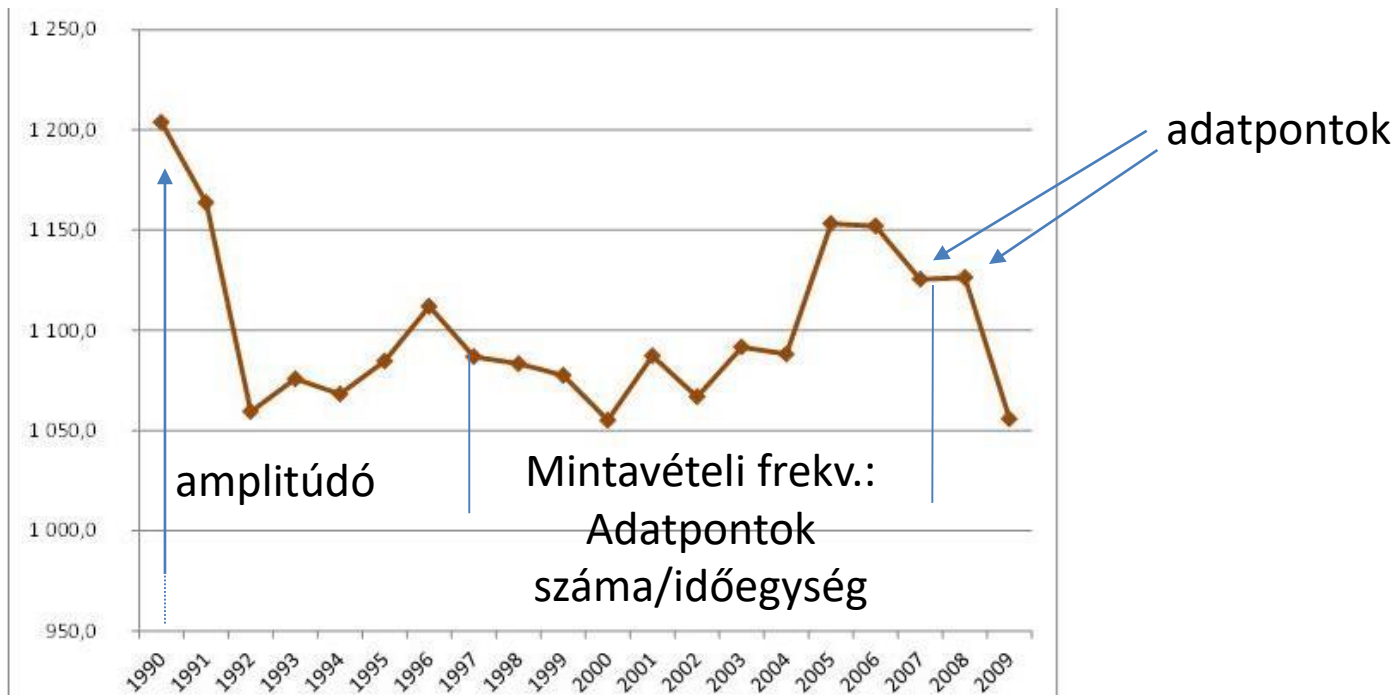
vigyünk a tudományba!



IDŐSOROK

Idősornak az olyan statisztikai megfigyeléseket nevezzük, amelyek elemeit egymást követő

időpontokban (idő-
szakokban) regisztrá-
ták, és ez az időbeli-
ség az adatok fontos
tulajdonsága.



(TESTRESZABOTT) PÉLDÁK IDŐSOROKRA

↪ **Bármilyen ismételt mérhető** ↪ **...az méréendő is**

↪ Pszichofiziológiai adatok

- ↪ Légzés
- ↪ Szívritmus
- ↪ Izomtónus
- ↪ Bőrellenállás, agyi potenciálok (EEG)

↪ „Pszichológiai” idősorok

- ↪ Hangulat, éberség
- ↪ Teljesítmény

↪ (csecsemő) táplálkozása

↪ Egészségtudományi idősorok

↪ Állapot-romlás, javulás

↪ Járványgörbék!



stb



KÉRDÉSEINK/CÉLJAINK

↪ Milyen frekvenciakomponensekből épül föl a jel?

↪ Pl. a szívritmus ingadozásában tükröződnek-e más ritmusok (légzés) és ha igen, kinél, mikor és milyen mértékben?

↪ Vannak-e „rejtett” (statisztikailag szignifikáns) periodikus idői mintázatok az adatsorban?

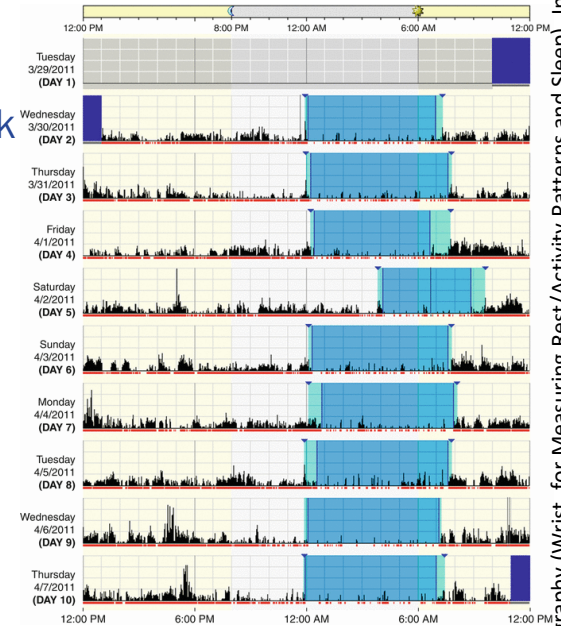
↪ Null hipotézis - Nem nincsenek

↪ Igen, vannak (null hipotézis elutasítása)

→ Frekvencia

→ Amplitúdó

→ Fázis



KOSZINOR ELEMZÉS (COSINOR ANALYSIS)

Hipotézis: az idősor oszcillációval leírható

Teszt: koszinor elemzés

(illesszünk cosinus hullámokat az idősorra, nem-lineáris regresszió révén)

$$Y(t) = M + A\cos(2\pi t/\tau + \phi) + e(t)$$

$Y(t)$ -- adatok az idő függvényében (t)

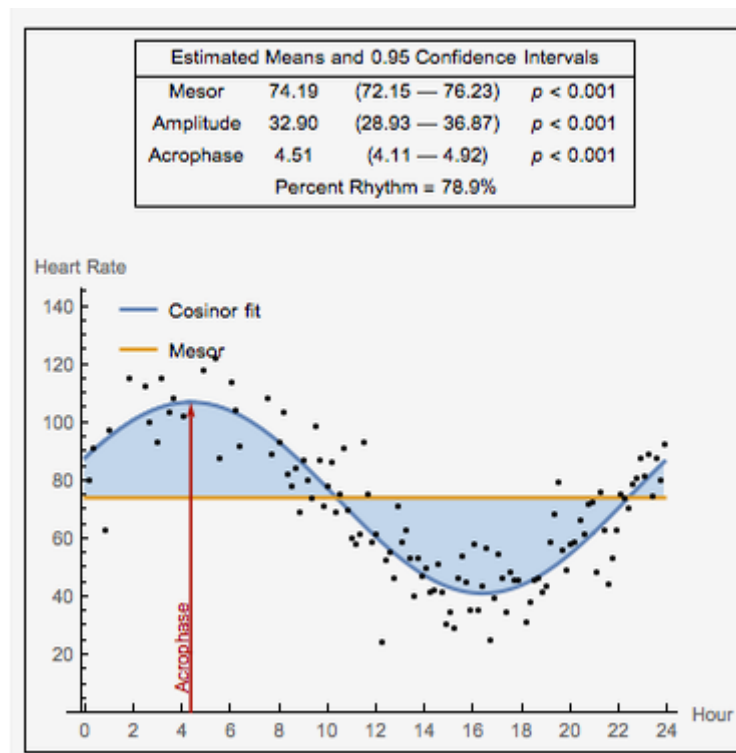
M -- MESOR - átlagérték
(midline estimating statistic of rhythm)

A -- amplitúdó

ϕ -- akrofázis
(maximális értékhez tartozó időpillanat)

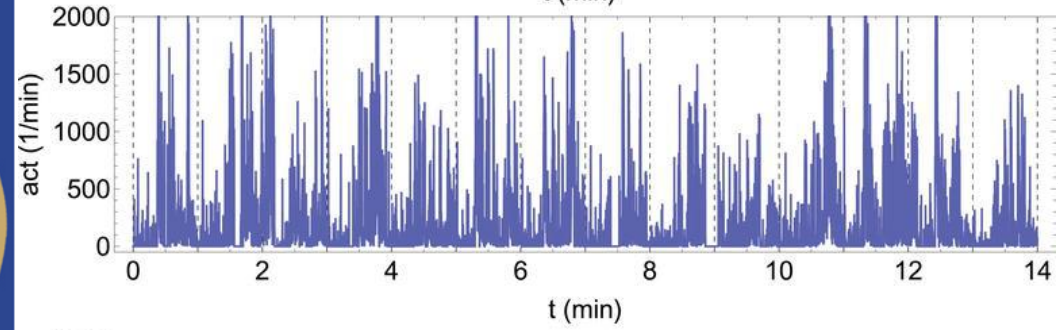
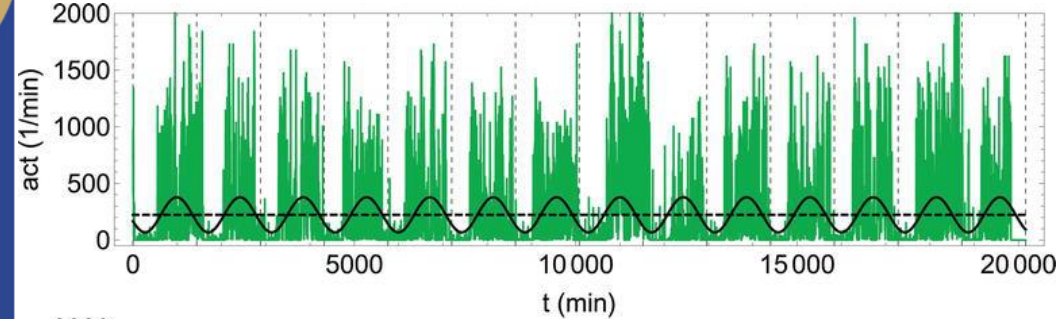
τ -- periódus
(egy ciklus időtartama)

$e(t)$ -- hiba (error) az idő függvényében. Az egymást követő illesztési hibákról feltételezzük, hogy függetlenek, gyakorisági eloszlásuk Gauss-függvénnyel leírható, továbbá átlaguk 0.

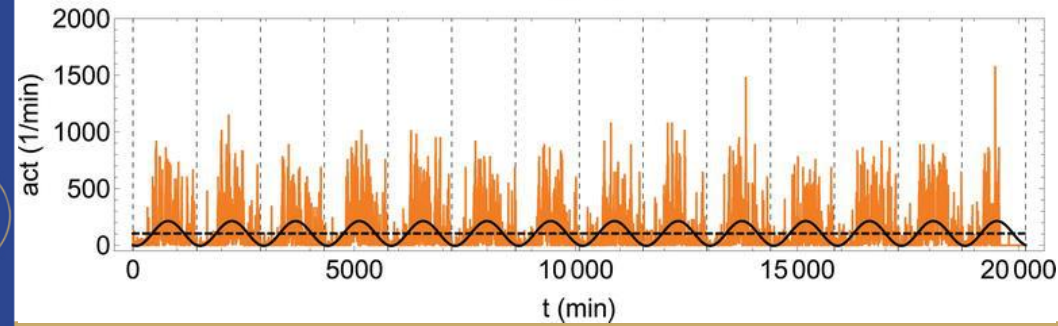


COSINOR ELEMZÉS: PÉLDA

Aktigráfiás felvételek



Nem szignifikáns az illeszkedés



éjfél

Fiatal reguláris cirkadián ciklussal
Fiatal irreguláris cirkadián ciklussal
Idős reguláris cirkadián ciklussal

Fossion R et al. In: El-Esawi MA, ed. Circadian Rhythm - Cellular and Molecular Mechanisms. London: IntechOpen; 2018 doi: 10.5772/intechopen.74742



AMIKOR KOSZINOR ELEMZÉST HASZNÁLUNK

- ↪ Kevés (és egyenlőtlen időközű) a mintavételi adatunk
- ↪ Többnyire adott frekvenciájú komponenseket keresünk (pl. 24 óra)
- ↪ Elsősorban kronobiológiai kérdésfeltevés mentén gondolkodunk
- ↪ Az illesztések jósága szignifikancia formájában ölthet testet
- ↪ Excelben: Bourdon L et al. Aviat Space Environ Med 1995 Aug;66(8):787-91.
- ↪ Pythonban: Moskon M. BMC Bioinformatics volume 21, Article number: 485 (2020)



Illesztés helyett Fourier-transzformáció



Joseph Fourier:
1768-1830

- Minden periodikus függvény előállítható hullámfüggvények összegeként
 - A sejtés/felfedezés Joseph Fourier francia matematikus nevéhez fűződik
- Az összegben különböző frekvenciájú szinuszos és/vagy koszinuszos jelek vesznek részt

THIS WEEK

EDITORIALS **WORLD VIEW** South Korea's public consultation on atomic power **p.415** **FINAL CHANCE** Rhino species down to two as last male dies **p.418**

Transformational thinking

The mathematics of Joseph Fourier, born 250 years ago this week, shows the value of intellectual boldness — influencing everything from data processing to machine-learning algorithms.

When you listen to digital music, the harmonies and chords that you hear have probably been reconstructed from a file that stored them as components of different frequencies, broken down by a process known as Fourier analysis. As you listen, the cochleae in your ears repeat the process — separating the sounds into those same sinusoidal components before sending electrical signals to the brain, which puts the components together again.

Fourier analysis allows complex waveforms to be understood and analysed by breaking them down into simpler signals. And it's a shining example of the power and value of intellectual boldness.

The roots of the idea go back to the mid-1700s, when the Italian mathematical physicist Joseph-Louis Lagrange and others studied the vibration of strings and the propagation of sound. But it was one of Lagrange's pupils, Joseph Fourier, who in 1822 truly founded the field that carries his name.

Fourier was born 250 years ago this week, on 21 March 1768. Today, there is virtually no branch of science, technology and engineering that is left untouched by his ideas. Modern versions and analogues of his theory help researchers to analyse their data in almost every discipline, powering everything from YouTube's videos to machine-learning techniques.

Among the scientists who benefited is Ingrid Daubechies, an applied mathematician, who in the 1980s helped to develop the theory of wavelets, which generalized Fourier analysis and opened up previously inaccessible problems. Wavulate some one of the main data analysis

a sound wave. Crucially, his analysis included functions for which temperature was allowed to have 'discontinuities, or abrupt jumps. This possibility horrified mathematicians at the time, who were much more comfortable with smooth curves that promised aesthetic simplicity. Fourier stuck to his guns and, as he developed his ideas, started to win his critics over.

Beyond breaking down a function into frequencies, Fourier created a 'Fourier transform' that encodes all those frequencies, and that became known as the Fourier transform. In the twentieth century, the Fourier transform became central to quantum mechanics, showing how physical quantities such as position and momentum are 'dual, or complementary, to each other. This means that they cannot be known simultaneously with arbitrary precision: this 'Heisenberg uncertainty' is seen as one of the fundamental principles of nature. And crystallographers now understand that the X-ray diffraction patterns of a crystal are the Fourier transform of the crystal's structure.

Modern incarnations of Fourier analysis include the 'fast Fourier transform' and 'discrete Fourier transform', which allow faster and more-efficient processing of large amounts of information, including data produced by astronomers.

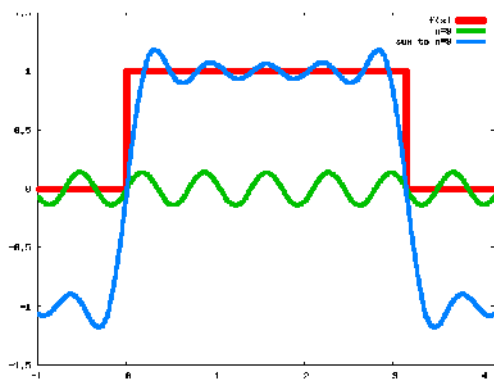
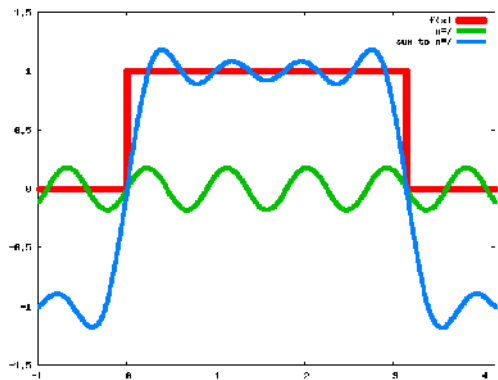
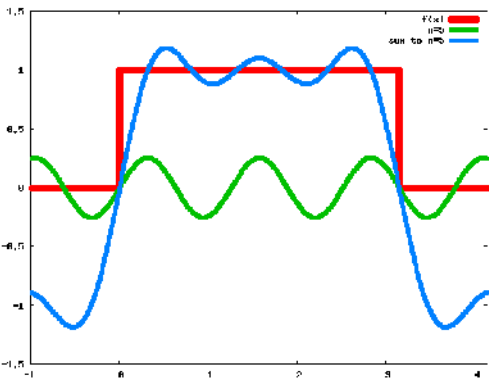
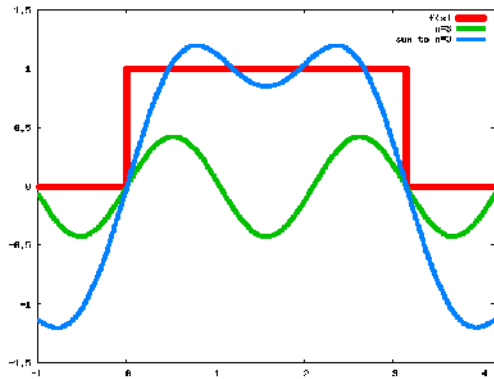
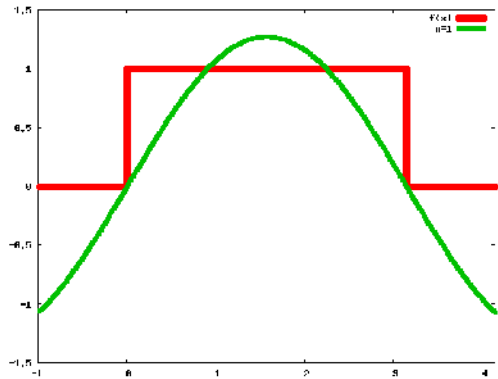
Fourier would surely be delighted that his ideas have endured. Writing to a friend 79 years ago, he lamented his lack of achievement

"Today, there is virtually no branch of science that is left untouched by his ideas."



DEMONSTRÁCIÓ - I:

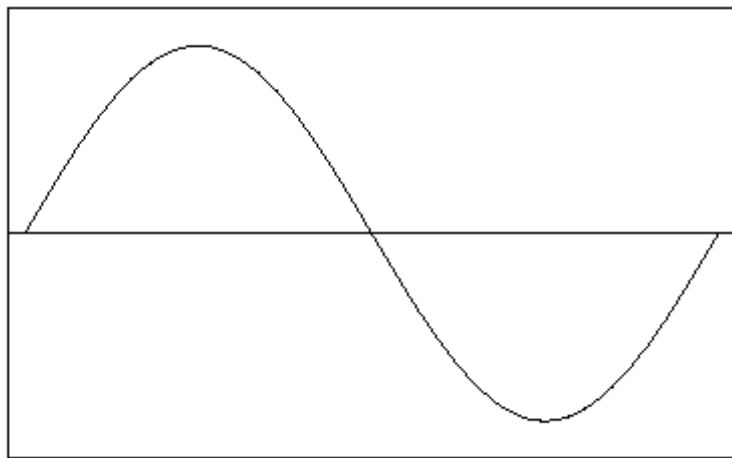
Négyszögjel közelítése szinuszos hullámokkal



DEMONSTRÁCIÓ II.:

négyszögjel = sinus hullámok összege

$$s(t) = \sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \dots$$

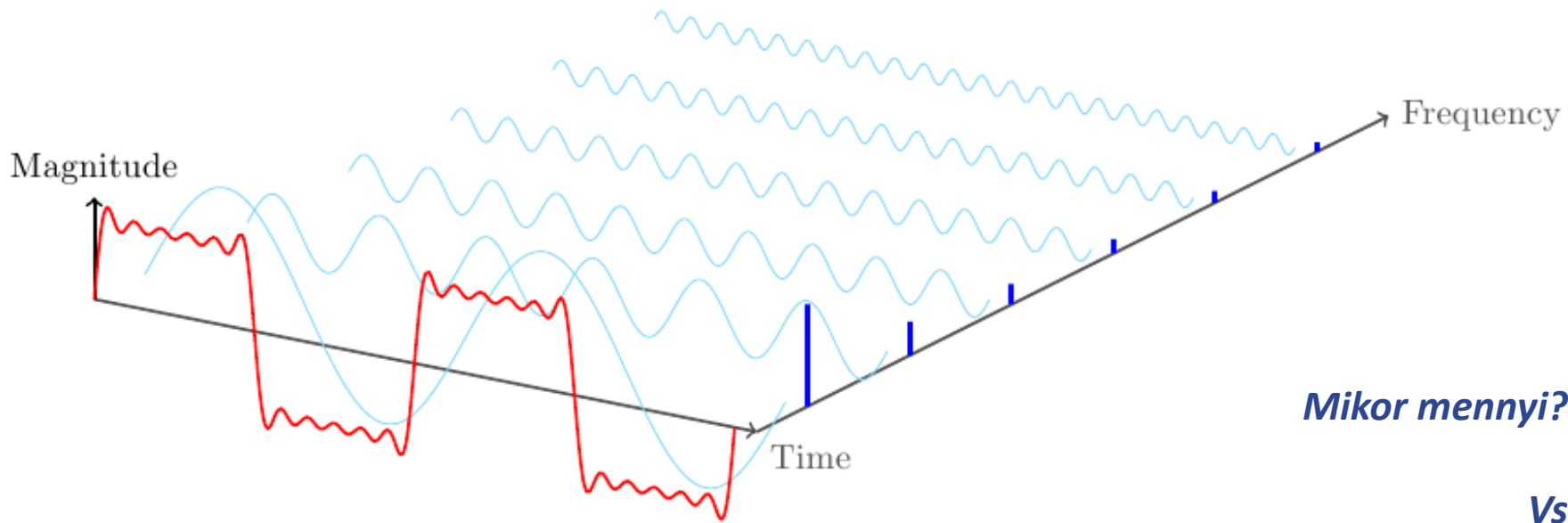


$$s(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t + \phi_1) + a_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + a_3 \sin(3\omega t + \phi_3) + \dots$$

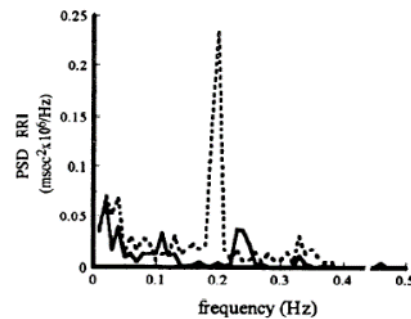
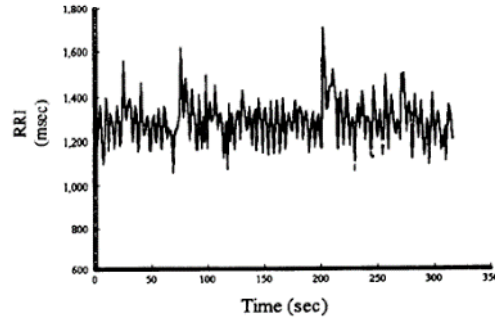
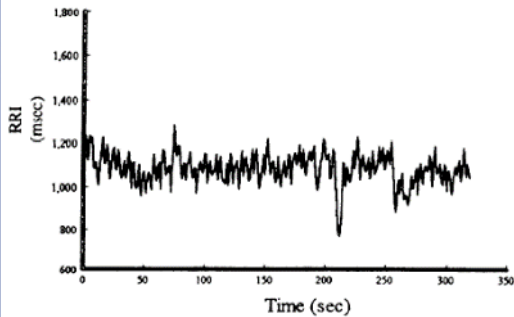
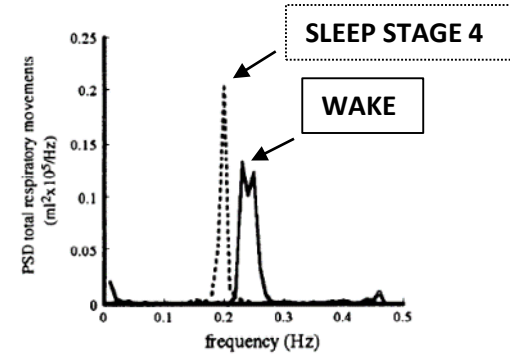
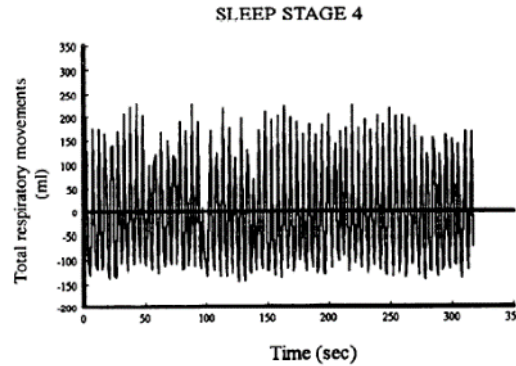
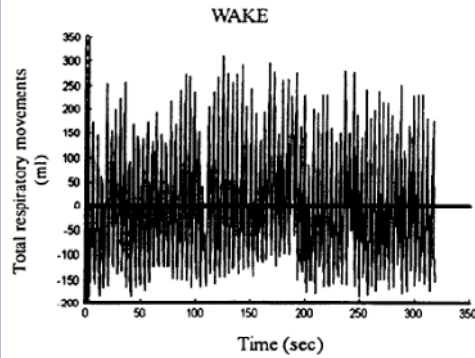
IDŐ VS FREKVENCIA



Az idősor átalakítása
frekvenciaterérré: $x(t) \rightarrow f(t)$



PÉLDA: LÉGZÉS ÉS SZÍVRITMUS-FREKVENCIA ÉBRENLÉTBEN ÉS ALVÁSBAN



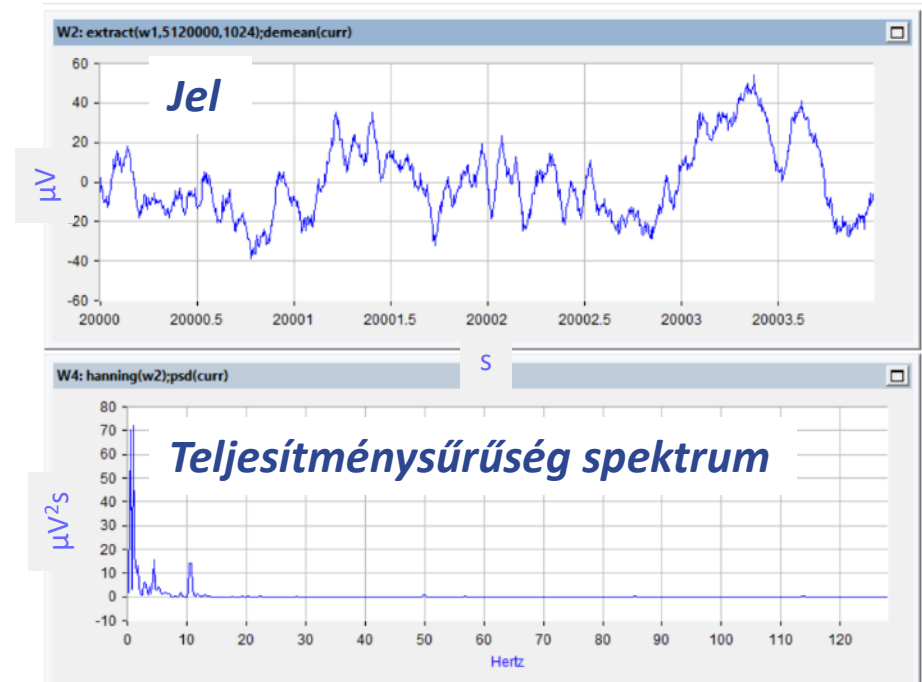
Légzés (fölül) és szívritmus (alul) idősorok ébrenlétben (WAKE) és mély lassú hullámú alvásban (SLEEP STAGE 4)

...illetve a teljesítménysűrűség spektrumaik (PSD)

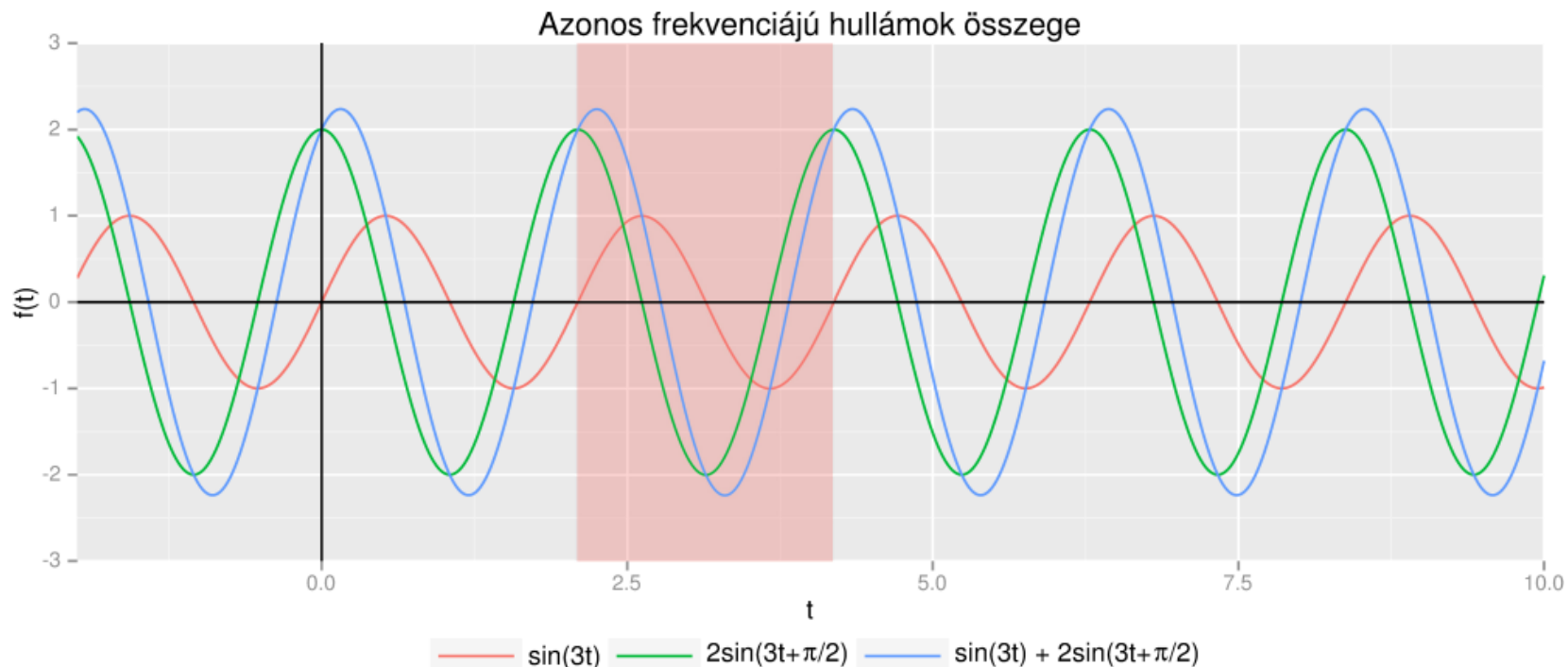


DE MI AZ A TELJESÍTMÉNYSŰRŰSÉG SPEKTRUM?

A jelben rejlő
frekvenciakomponen-
sek intenzitását
kifejező függvény



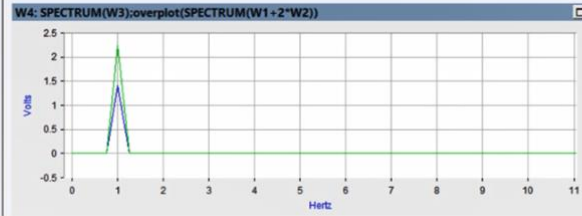
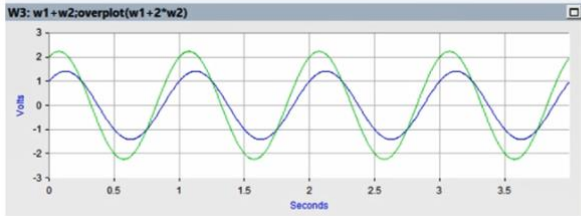
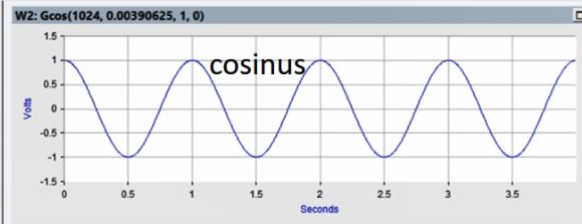
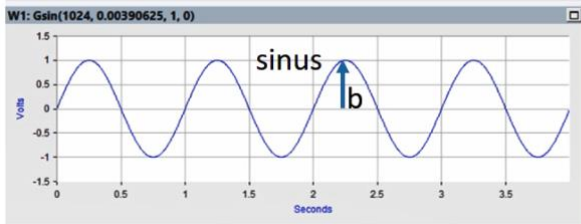
TOVÁBB A FREKVENCIAFELBONTÁS ÚTJÁN



Azonos frekvenciájú hullámok összege is hullámfüggvény lesz, melynek frekvenciája megegyezik az összeadott hullámok frekvenciájával



FREKVENCIABINEK



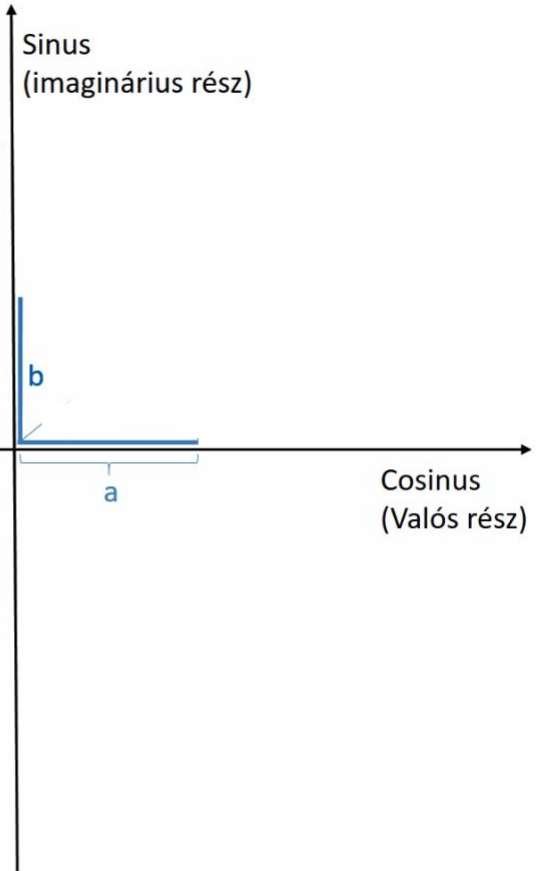
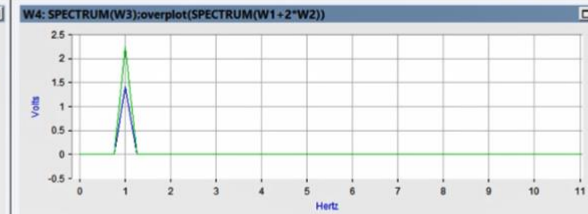
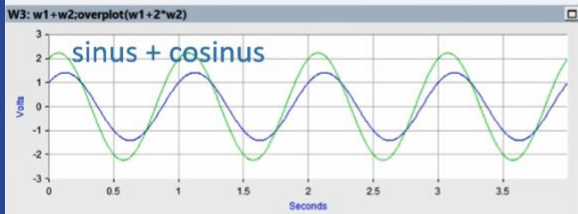
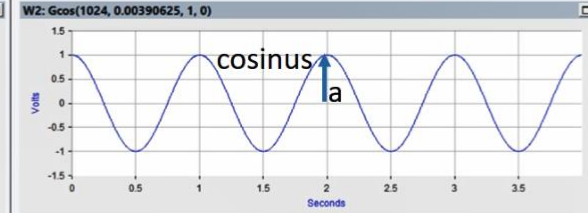
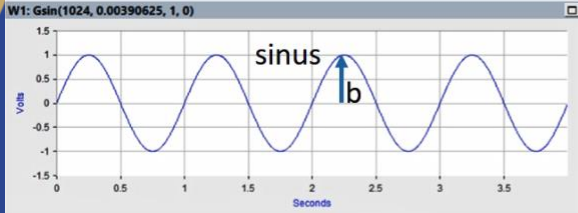
Sinus
(imaginárius rész)

b

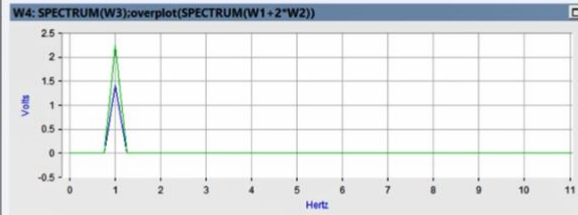
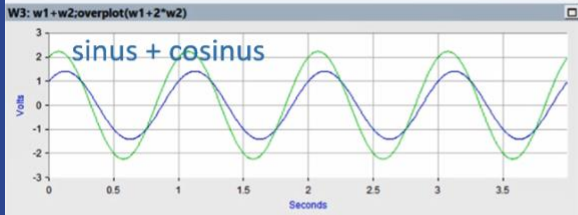
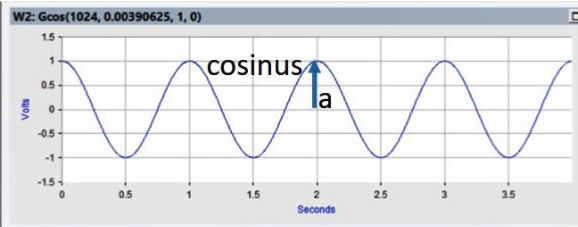
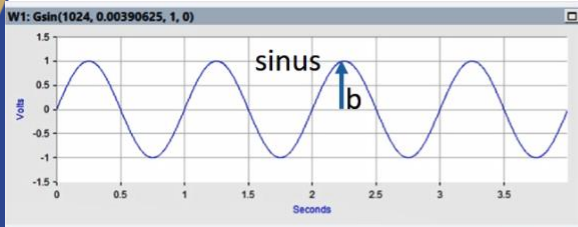
Cosinus
(Valós rész)



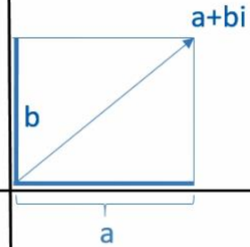
FREKVENCIABINEK



FREKVENCIABINEK



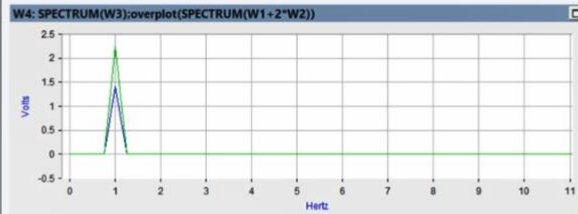
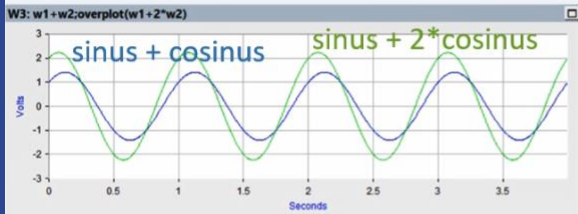
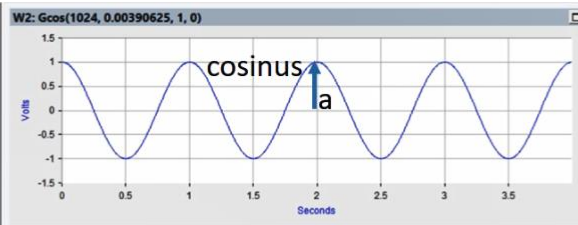
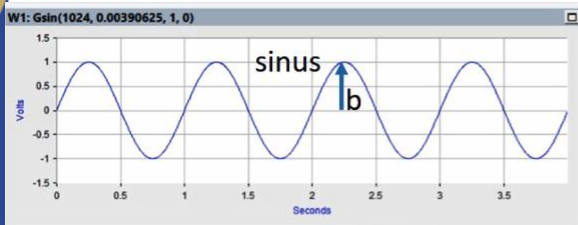
Sinus
(imaginárius rész)



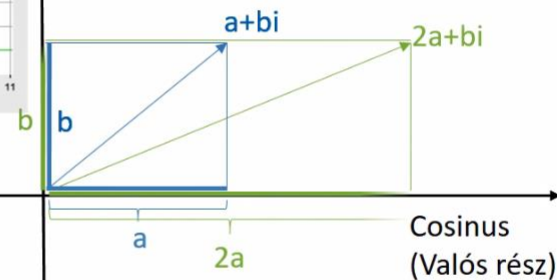
Cosinus
(Valós rész)

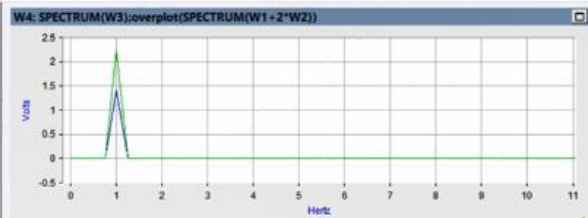
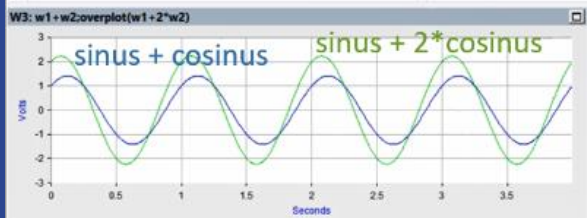
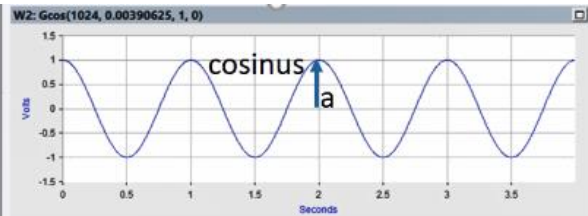
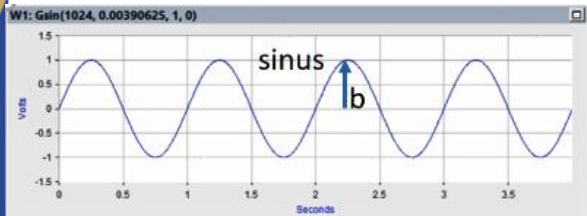


FREKVENCIABINEK



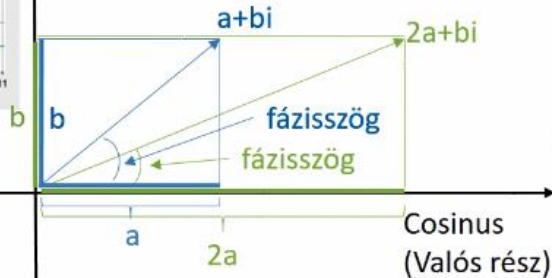
Sinus
(imaginárius rész)





FREKVENCIABINEK

Sinus
(imaginárius rész)



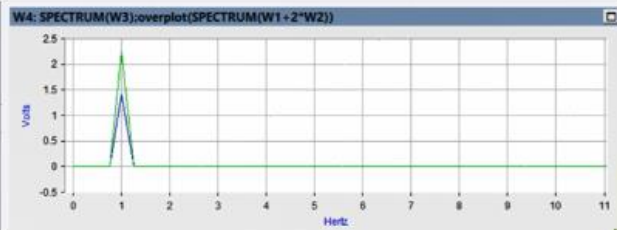
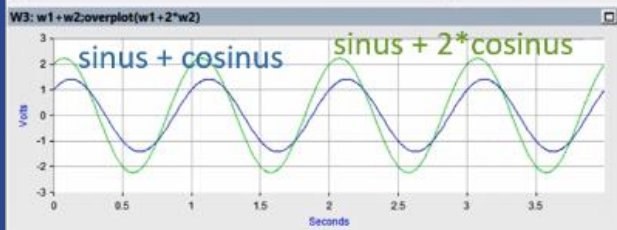
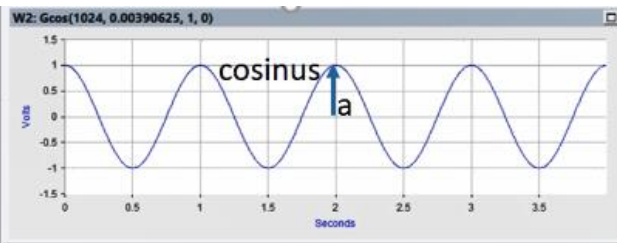
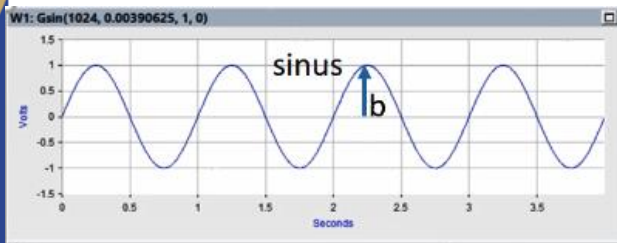
Cosinus
(Valós rész)

**Minden egyes frekvenciabin egy azonos frekvenciájú
cosinus és sinus hullám összege.**

**Egyébként pedig ekvivalens egy cosinus és egy sinus
hullámmal végzett konvolúcióval.**

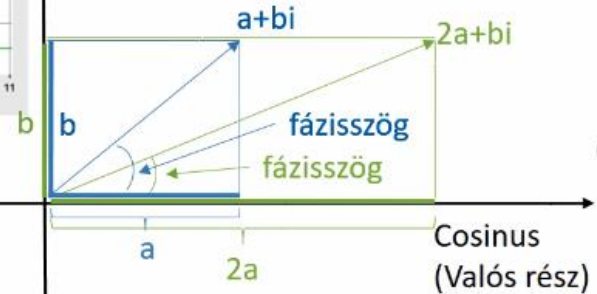
00:19,44





FREKVENCIABINEK

Sinus
(imaginárius rész)



Fourier-transzformáltból származtatott mutatók:

Amplitúdóspektrum: $\sqrt{a^2 + b^2}$ (a vektor „hossza”)

$$\sqrt{4a^2 + b^2}$$

Teljesítményspektrum: $a^2 + b^2$ (a jel négyzete)

$$4a^2 + b^2$$

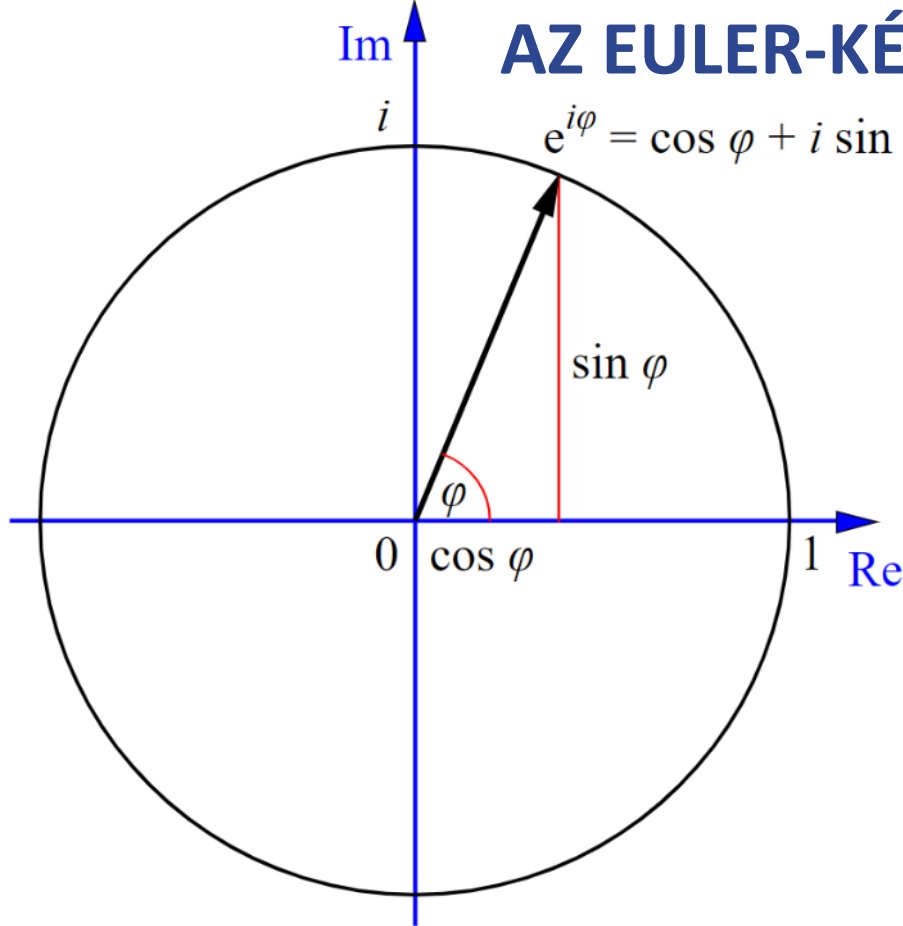
Teljesítménysűrűség-spektrum: időtartam * $(a^2 + b^2)$ (a jel négyzetének görbe alatti területe)

$$\text{időtartam} \times (4a^2 + b^2)$$

00:19,44

Statisztikai elemzés előtt
normalizálás
(logaritmikus
transzformáció!)

AZ EULER-KÉPLET ÉS A FOURIER-ELEMZÉS



$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad \leftarrow \text{Euler-képlet}$$

és következményei:

$$z = \boxed{x + iy} = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = \boxed{|z|e^{i\phi}}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vagyis egy idősor Fourier transzformáltját föl lehet írni

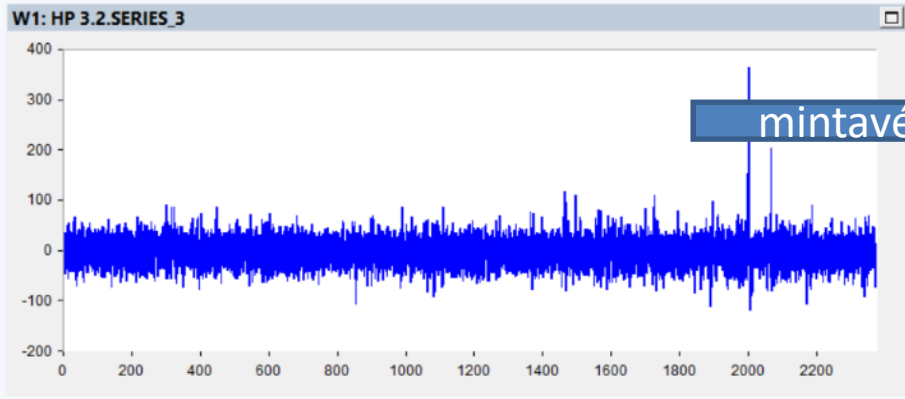
1. Komplex számok sorozataként

1. Ahol a valós rész a cosinus hullám amplitúdója
2. A képzetes rész a sinus hullám amplitúdója

2. Egy valós pozitív szám és a Euler-szám komplex hatványának szorzataként

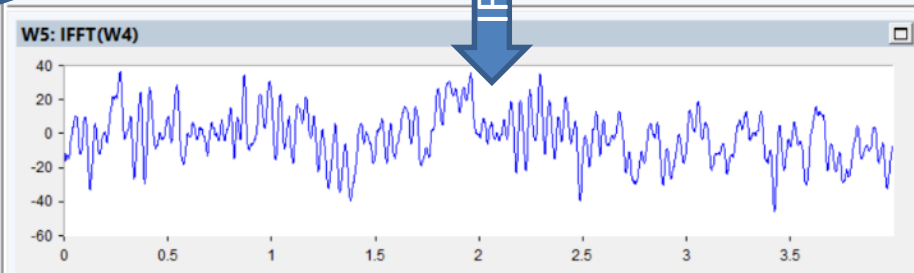
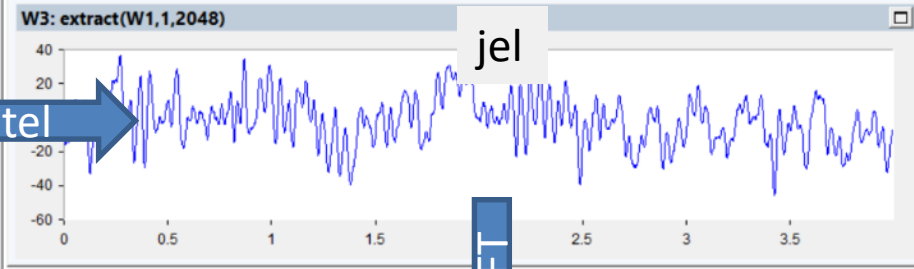
1. Ahol a valós pozitív szám az adott frekvenciájú komponens amplitúdója (sin + cos)
2. A kitevő képzetes része pedig az adott frekvenciájú komponens fázisa (ϕ)

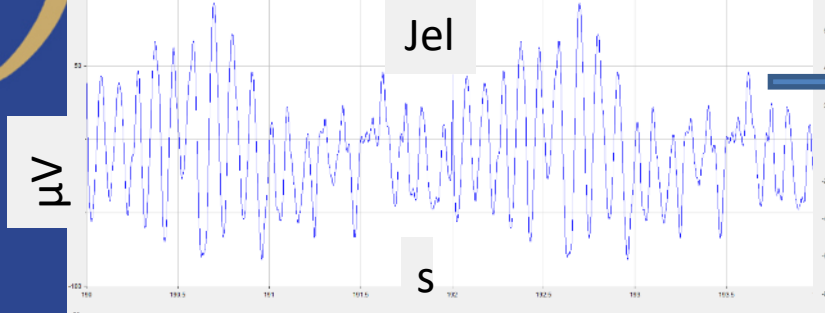




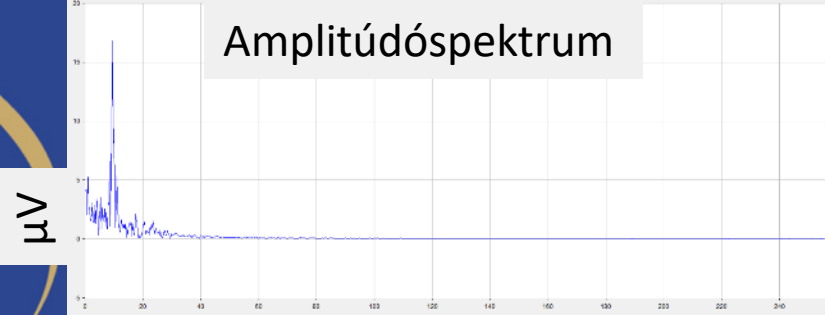
W2: W4

	1: uV	uV	uV
1:	-3747.420472	0.0000001	
2:	-3521.059894	-3950.3372201	
3:	2370.581547	-3191.5940921	
4:	-5756.814688	-185.1935871	
5:	2597.047199	-633.1241141	
6:	-421.865429	-4157.2006561	
7:	-3064.012202	1481.4639191	
8:	-775.599208	-513.5132951	
9:	539.215583	-59.8817061	
10:	-1022.267450	-1805.6990421	
11:	-61.675925	2829.3554751	
12:	669.492531	-2743.3796851	
13:	531.453851	3286.1155861	

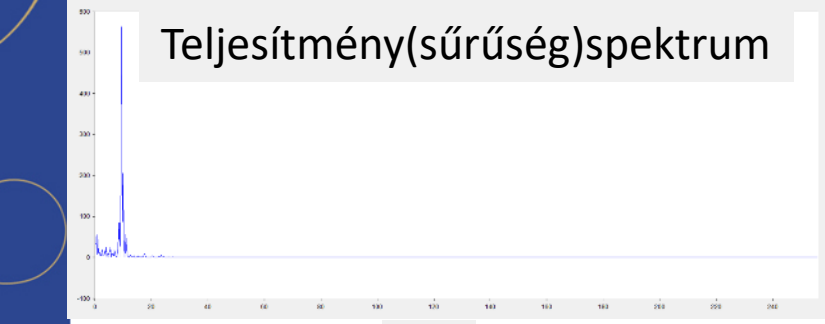




A végek 0-hoz közelítése a spektrális elfolyás elkerülése végett



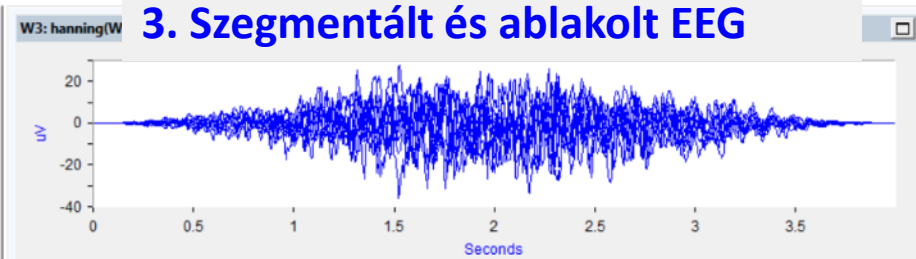
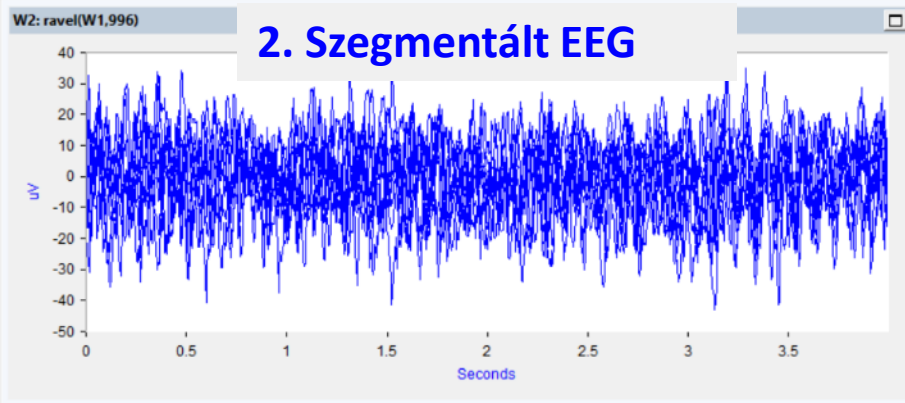
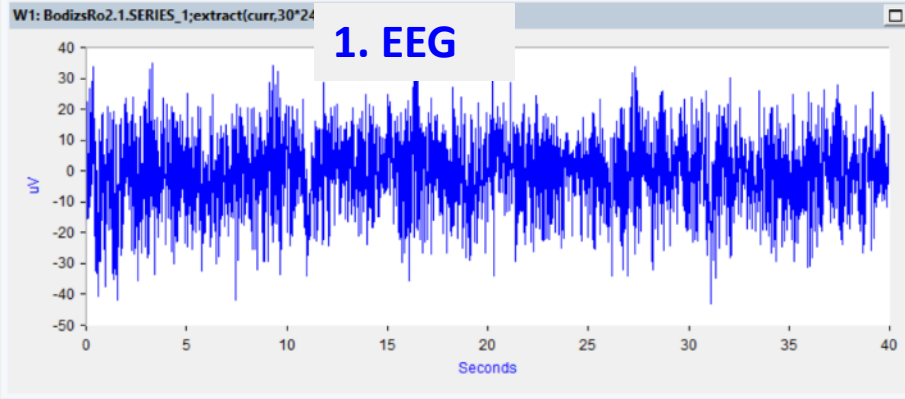
Nyquist frekvencia = a Jel mintavételi frekvenciája / 2



Arrows from the Nyquist frequency text point to the 120 Hz mark on the x-axis of both the amplitude and power spectra plots.



ÁTLAGOS TELJESÍTMÉNYSPEKTRUM KISZÁMÍTÁSA



Fourier elemzés, DFT, FFT, kevert gyökű FFT, inverz FFT (DFT)

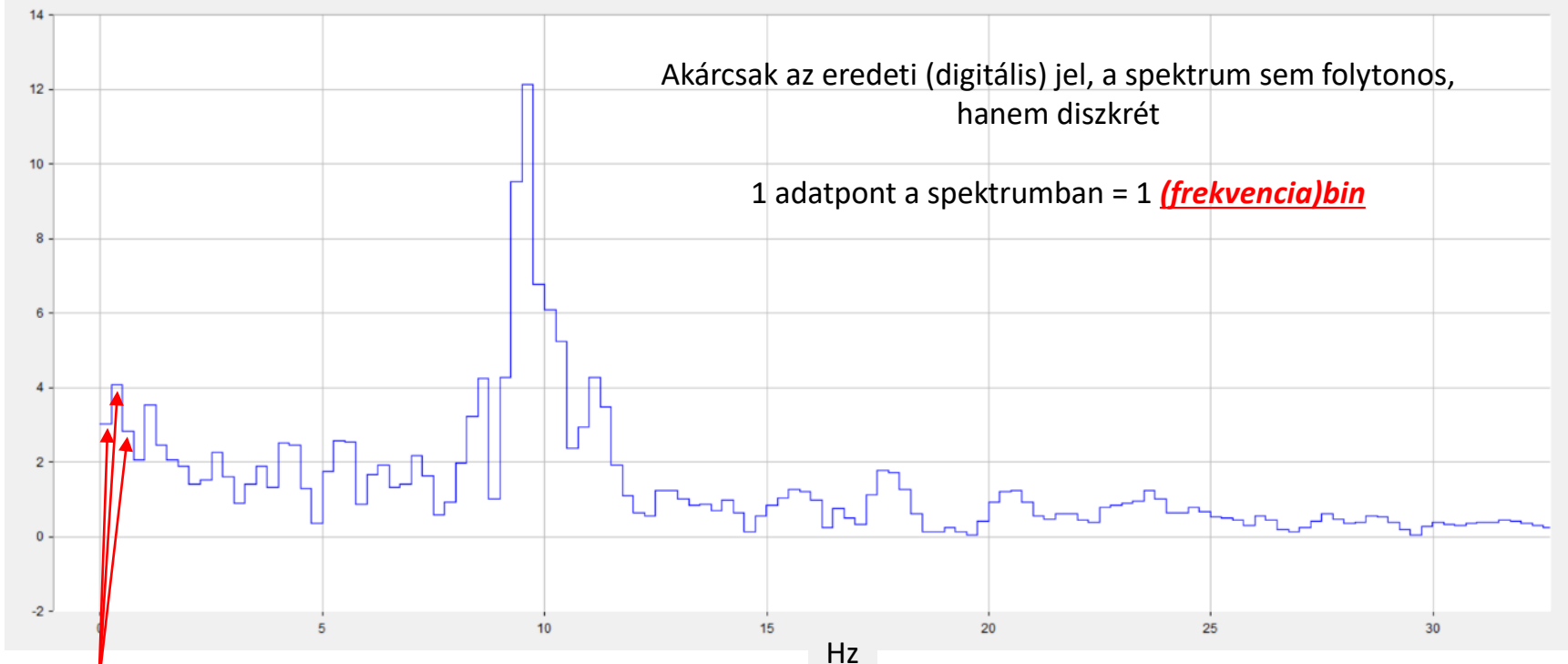
DFT – diszkrét Fourier transzformáció (nagyon sok művelet, tetszőleges számú pontból álló szakaszon)

FFT – gyors (Fast) Fourier transzformáció [2 hatványának megfelelő pontból álló szakaszon (pl. 64, 128, 256, 512, stb.) a műveletek száma csökkenthető, ezért gyors]

Kevert gyökű FFT – alszakaszokon FFT (ha a pontok száma nem prímszám), máshol DFT

IFFT, IDFT – inverz Fourier transzformációk (Fourier transzformált jellé történő (vissza)alakítása)

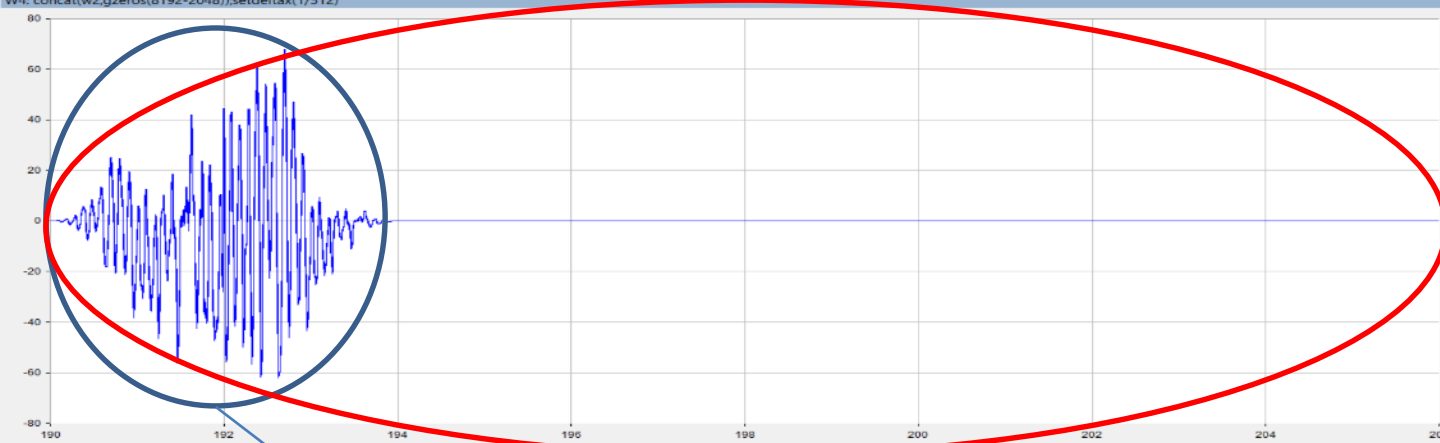




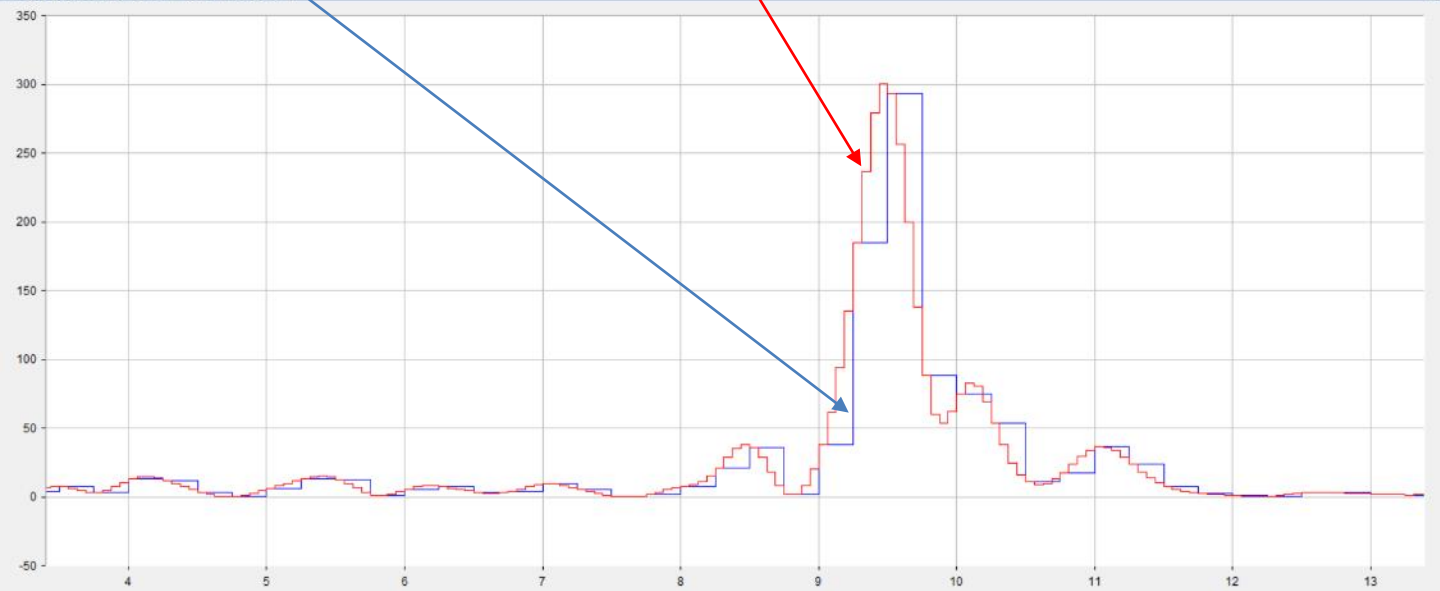
Binek száma: idősorban lévő adatpontok száma/2 + 1 (a plusz 1 a 0 Hz-es frekvenciabin, ami az adatpontok átlaga)

Binek szélessége: 1/szakasz hossza (pl. sec), vagyis 4 sec esetén minden bin $\frac{1}{4}$, azaz 0,25 Hz széles

Utolsó bin: idősor mintavételi frekvenciája (adatpontok sűrűsége a jelben)/2 (**Nyquist frekvencia**)



W4: extract(w2.1,2048);hanning(curr);psd(curr)



Zero-padding FFT:

A frekvenciafelbontás

javítása

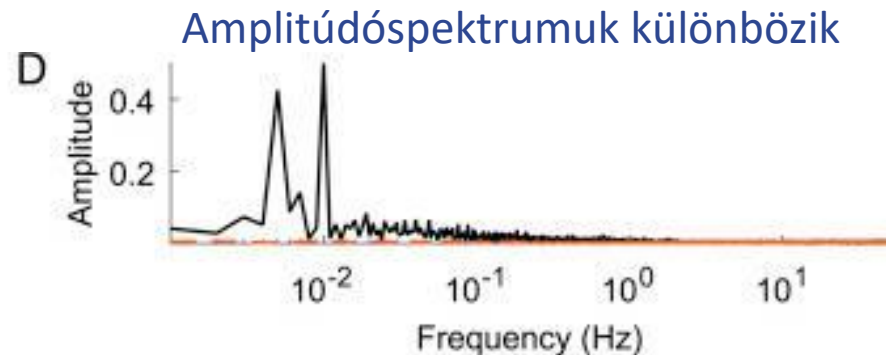
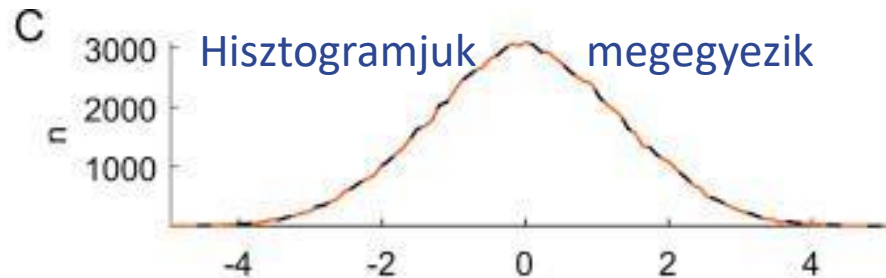
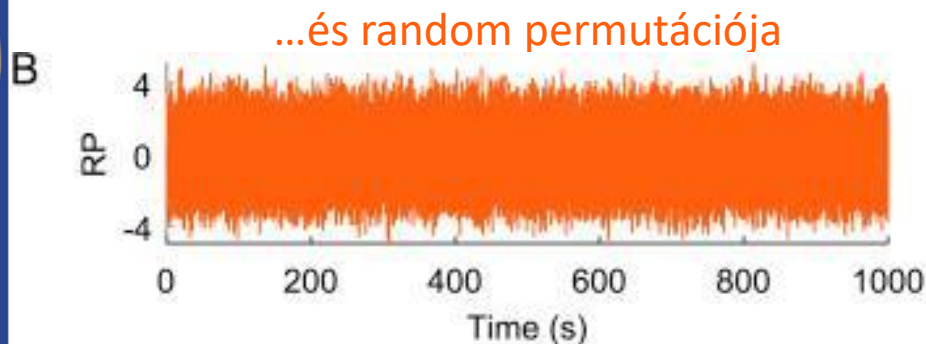
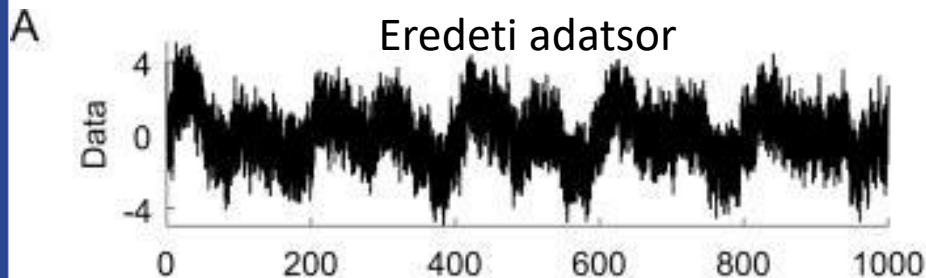
A frekvenciafelbontás (binek

száma) felduzzasztása az

eredeti idősorhoz adott 0

értékekkel

ALKALMAZÁS-I: SPEKTRÁLIS TARTOMÁNYOK SZIGNIFIKÁNCIÁJÁNAK TESZTELÉSE RANDOMIZÁLT ADATOK SEGÍTSÉGÉVEL



~500 randomizáció → 500 spektrum átlaga és szórása → eredeti adat vs randomizált (pl. egymintás t-próba)

Lancaster G et al. Physics Reports, 2018;748:1-60.



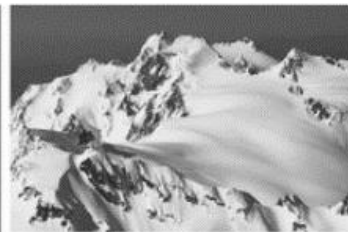
ALKALMAZÁS-II: FOURIER RANDOMIZÁCIÓ MINT KONTROLL- INGER/SZITUÁCIÓ



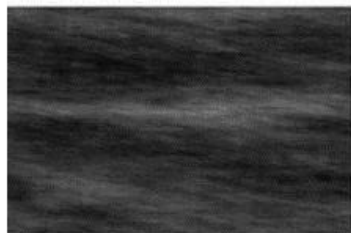
Beach 15 (RAND = 0)



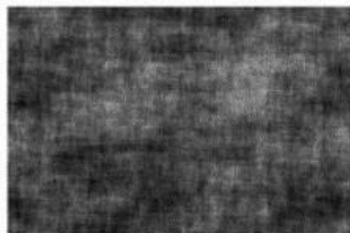
Street 4 (RAND = 0)



Mountain 18 (RAND = 0)



Beach 15 (RAND = 1.0)



Street 4 (RAND = 1.0)



Mountain 18 (RAND = 1.0)

Eredeti képek

Fourier-randomizált képek
[a frekvenciabinekekben lévő
spektrális amplitúdók ($|z| = \sqrt{a^2+b^2}$) megtartottak, a fázis (Φ)
randomizált]

A luminozitás és a téri frekvencia változatlan.

LOSCHKY I et al. J Vis 6(6):799-799.



ALKALMAZÁS – III: SZÍVRITMUSVARIABILITÁS ÉS STRESSZ

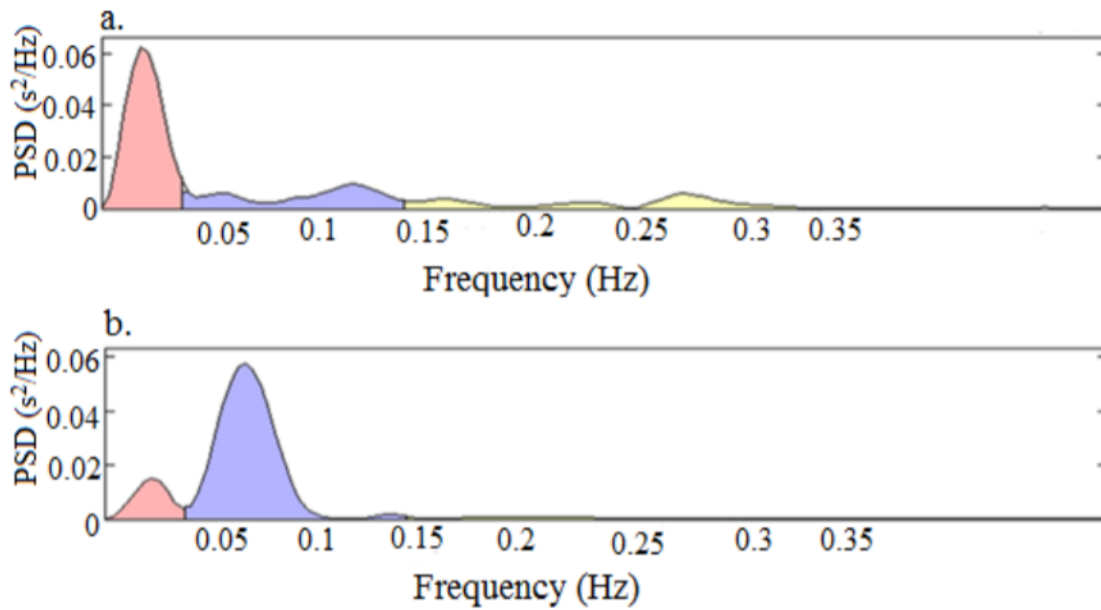
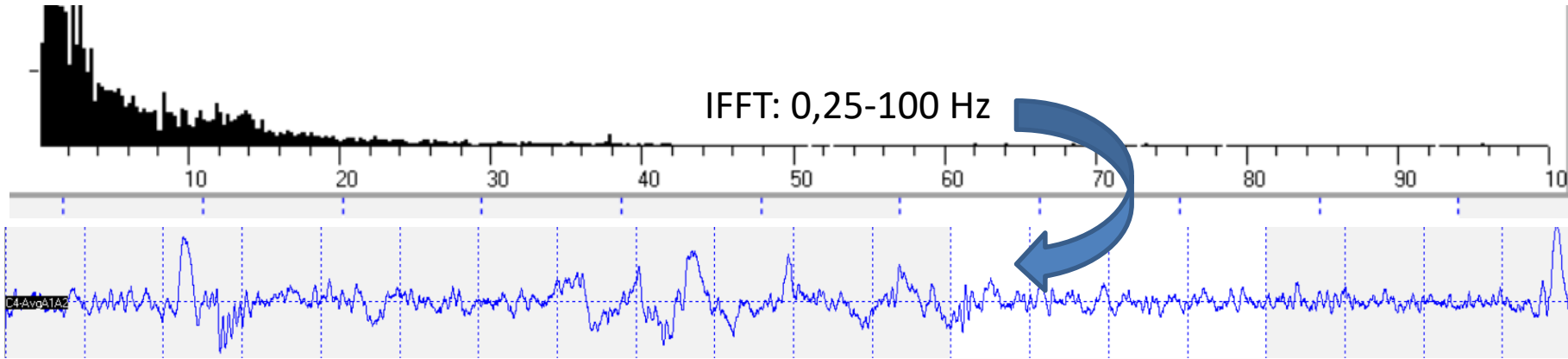


Fig. 6. Power spectral density graph of a participant during rest state (a) and mental test (b).
(Variance is indicated s^2)

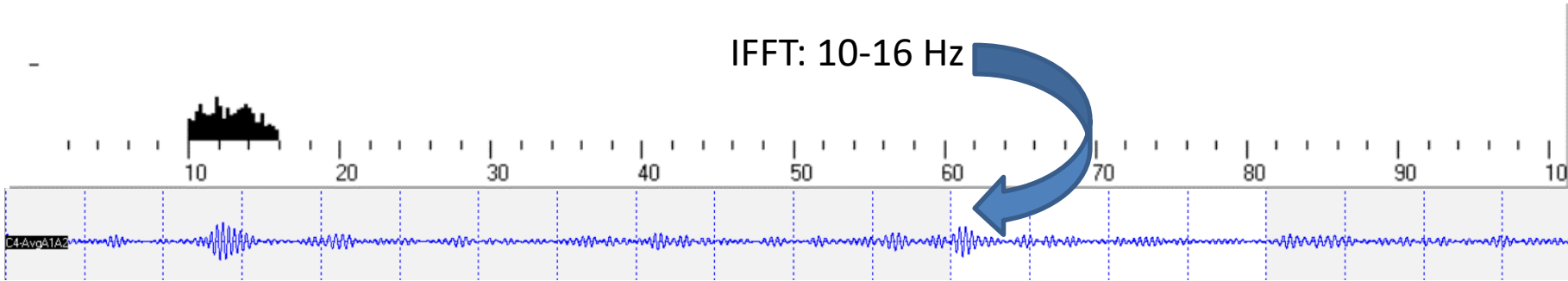
A tachogram (szívütések közötti intervallumok időSORA) teljesítménysűrűség spektruma egyes helyzetekben (itt nyugalmi állapot vs mentális erőfeszítés) eltérő

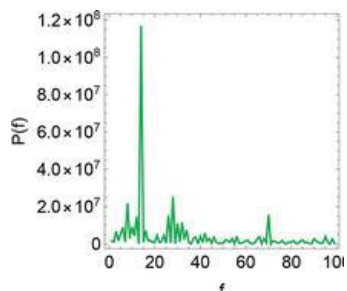
Fatma UYSAL and Mahmut TOKMAKCI / IU-JEEE Vol. 17(1), (2017), 3055-3060

DIGITÁLIS SZŰRÉS FOURIER-ANALÍZIS RÉVÉN

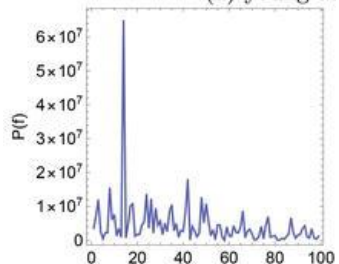


0-zd ki és alakítsd vissza! (A folyamatos átmenet/csillapítás indokolt)

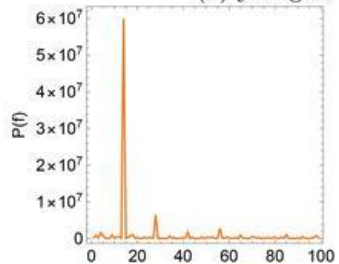




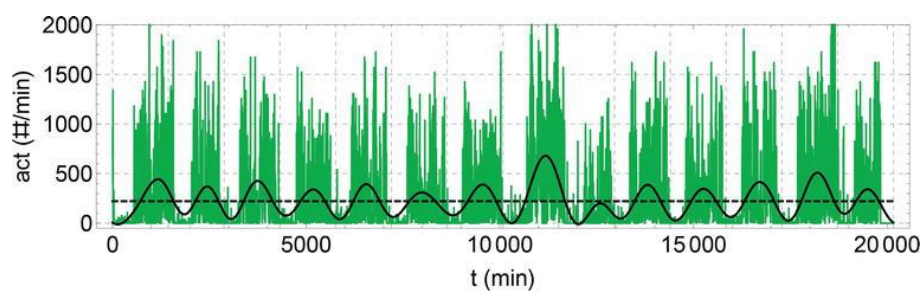
(a) young ac



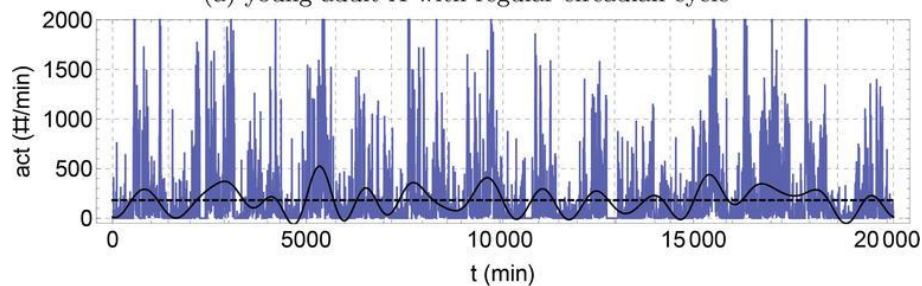
(b) young ad



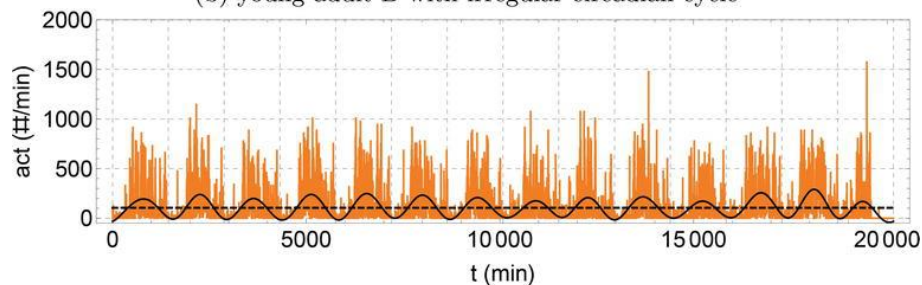
(c) older ad



(a) young adult A with regular circadian cycle



(b) young adult B with irregular circadian cycle



(c) older adult C with regular circadian cycle

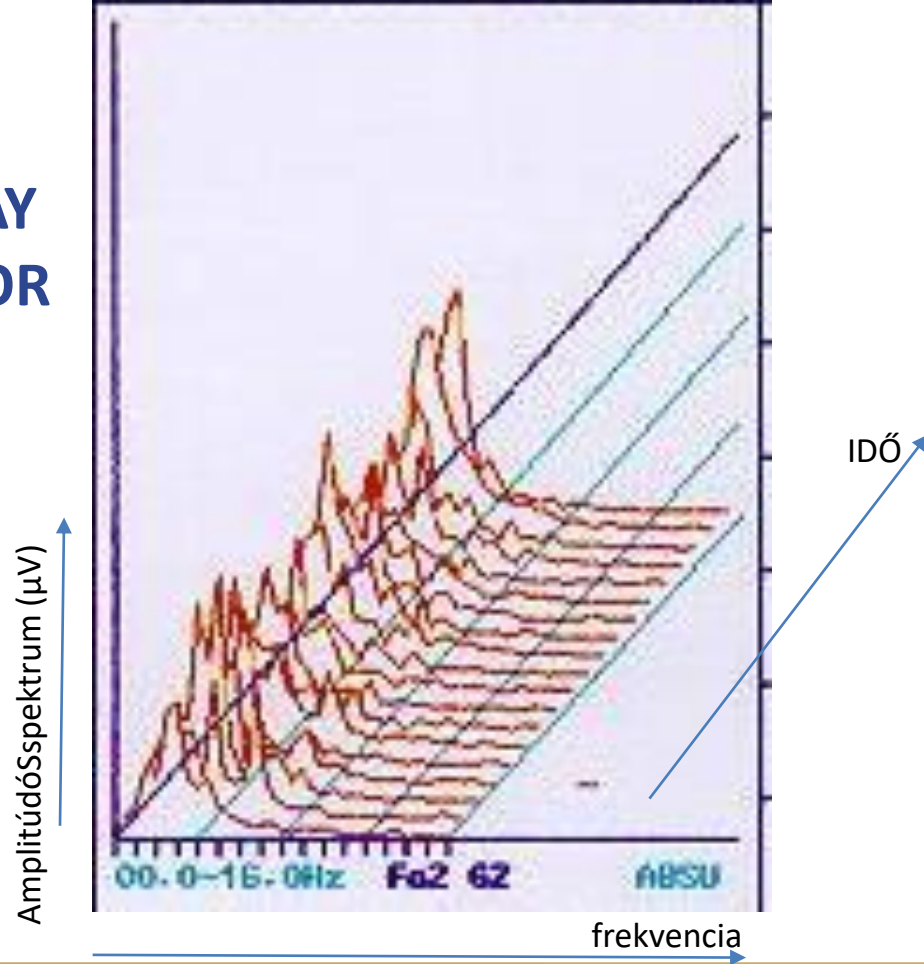
*Aktigráfiás
felvételek
teljesítmény-
spektruma és IFFT
révén visszanyert
illesztése a 20
legnagyobb
amplitúdójú
frekvencia-
komponens alapján*

Fossion R et al. In: El-Esawi MA, ed. Circadian Rhythm - Cellular and Molecular Mechanisms. London: IntechOpen; 2018 doi: 10.5772/intechopen.74742



TOVÁBBI (MEGJELENÍTÉSI) KÉRDÉSEK: COMPRESSED SPECTRAL ARRAY – TÖMÖRÍTETT SPEKTRÁLIS SOR

ÁTLAGOLÁS HELYETT:
IDŐI LEFUTÁS

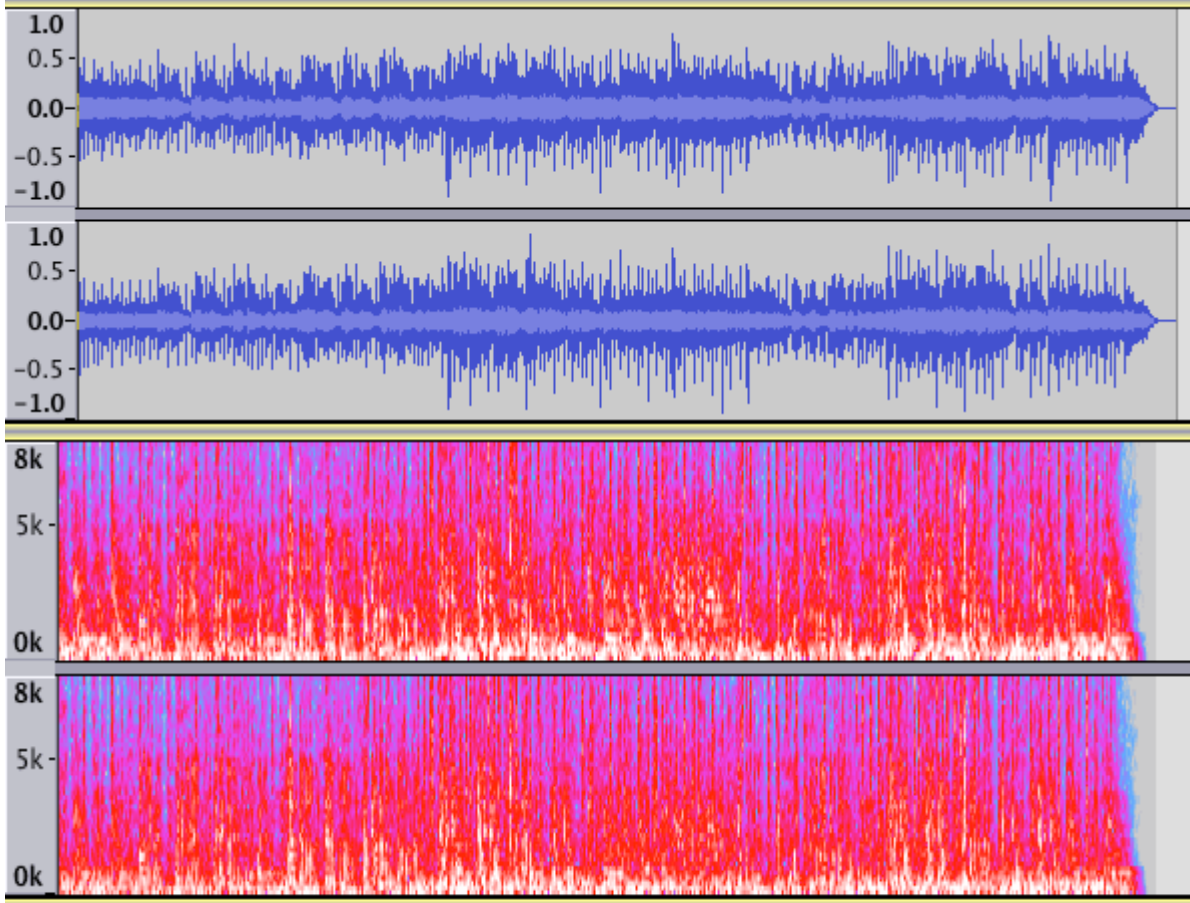


Bódizs et al. Hippocampus 2001



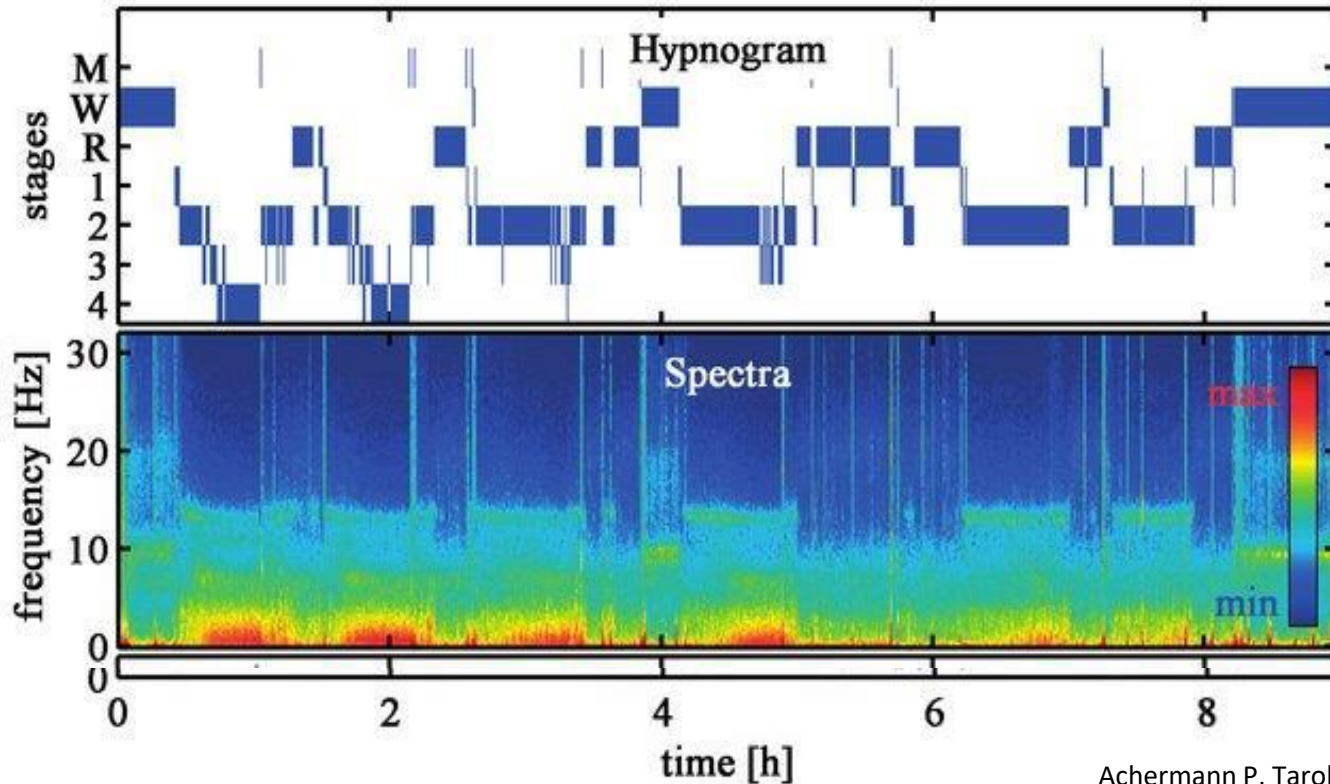
SPEKTROGRAM (zenei példa)

Zene (sztereo szignálként)



Zene (spektrogramként)
Minden függőleges oszlop
egy teljesítményspektrum
színekódolt formában.

SPEKTROGRAM (EEG példa)

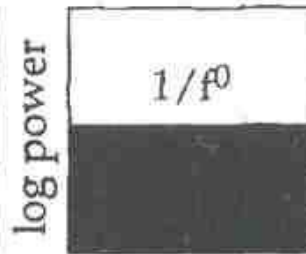
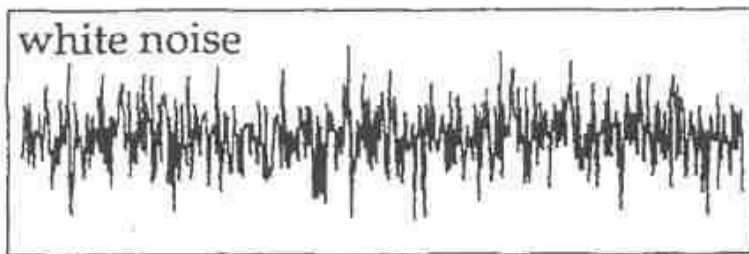


*Alvástádiumok
vizuálisan kiértékelt
mintázata alapján
fölrajzolt hypnogram
(fölül) és spektrogram
formájában (alul). Meleg
színek: nagyobb
spektrális teljesítmény*

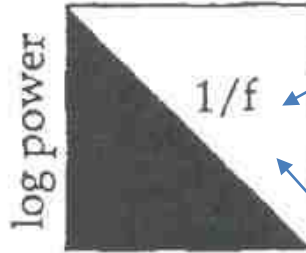
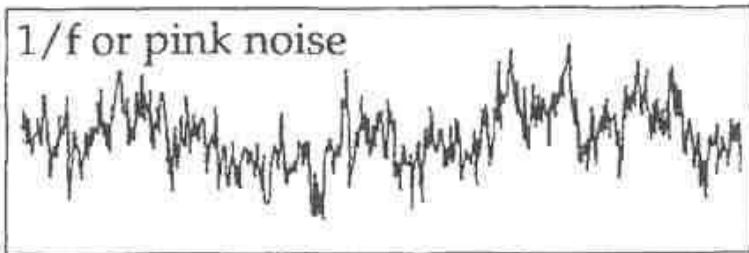
Achermann P, Tarokh L. Kosmos, 2014;63(2(303)):173-180.



1/f JELENSÉGEK A PSZICHOLÓGIÁBAN



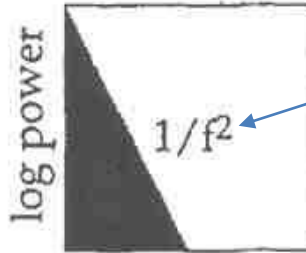
Egyik adat után bármilyen másik következhet, ráadásul azonos valószínűséggel



ÉBRENLÉT ALATTI EEG

A megkezdett trend bizonyos valószínűséggel folytatódik

ZENE



ALVÁS EEG

A megkezdett trend nagyobb valószínűséggel folytatódik

log frequency

Gilden DL. Psychol Rev 2001;108(1):33-56

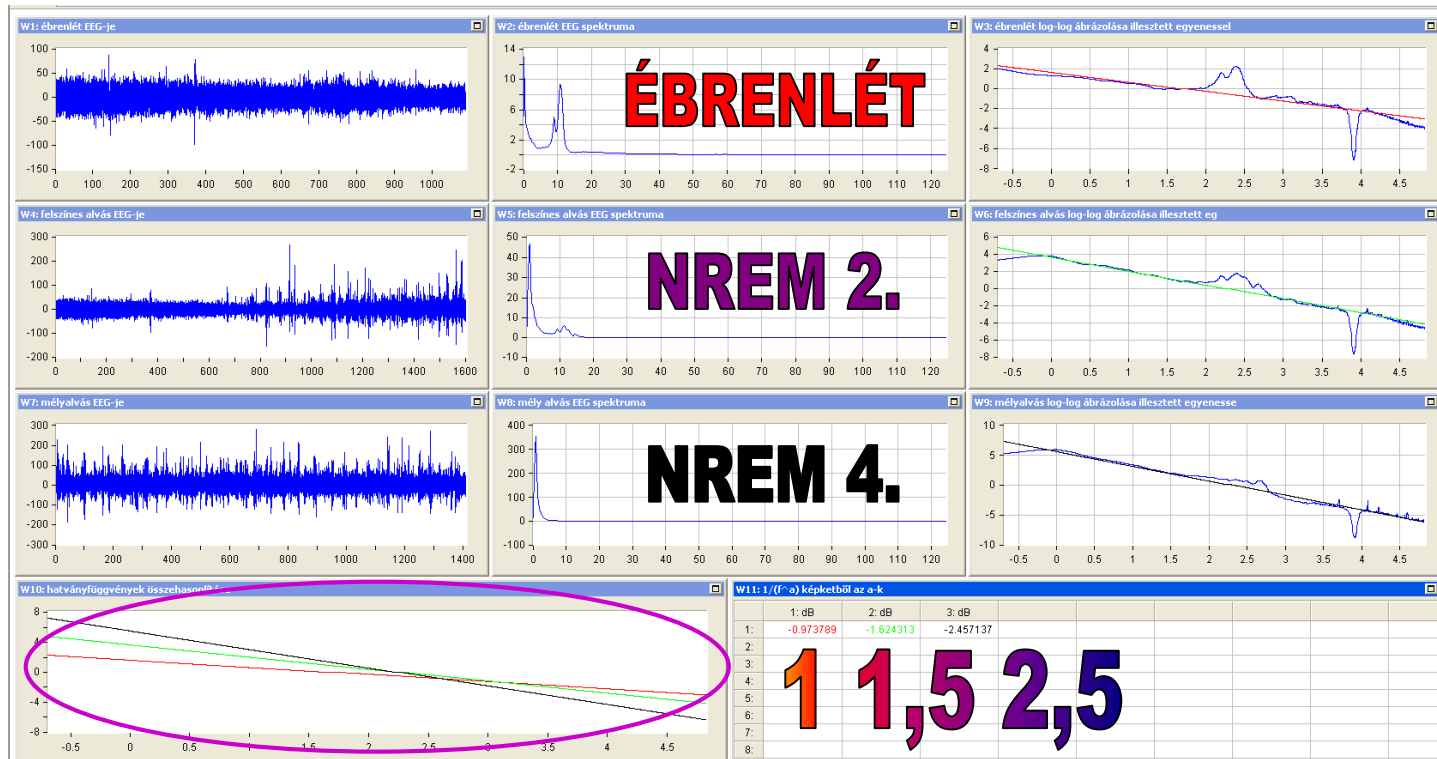


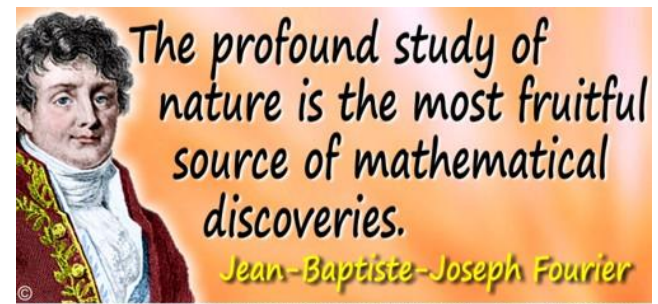
AZ ÉBRENLET, A SEKÉLY ÉS A MÉLY ALVÁS EEG-FELVÉTELEI HATVÁNYFÜGGVÉNYEK TÜKRÉBEN

Hatványkitevő,

alvásmélység,

tudat





More science quotes at Today in Science History todayinsci.com

KÖSZÖNÖM

A

FIGYELMET!



Semmelweis Egyetem
<http://semmelweis.hu/>

Jelfeldolgozás – I. Frekvenciaspektr.
Fourier transzformáció

Dr. habil. Bódizs Róbert
kutatási igazgatóhelyettes