

A sokoldalú ANOVA

Makara Gábor

2023-05-04

Miért jobb az ANOVA, mint a csoportok páros összehasonlításai?

- Gazdaságosabb
- A véletlen szóródást pontosabban becsüli
- Több kérdésre ad(hat) választ
 - Több szempontos ANOVA esetében kölcsönhatások is vizsgálhatók.

Miért jobb az ANOVA, mint a csoportok páros összehasonlításai?

- Összehasonlítást adott kísérleten belül végezhetünk.
- A páronkénti összehasonlításhoz minden párban (kísérletben) új kontroll kell!
- Ha 4 darab egyenként 10 elemű csoporton végzett ANOVA kísérlet helyett 3-szor 2*10 elemű csoportos kísérletet kell végeznünk (50%-al több a ráfordítás).
- Az egy szempontos ANOVA jobb hatásfokú, mert közös kontroll csoportot használ, és minden csoport hasonlítható minden másikhöz.
- Az ANOVA esetében a hibavariancia becslése pontosabb, szabadságfoka nagyobb
- Minden páros összehasonlításnál 1:20 arányban (vagy a szignifikancia szinttől függő arányban) van esélyünk hibás döntést hozni.
 - Az egy vizsgálatban végzett több páros összehasonlítás hibái halmozódnak
 - Az egész vizsgálat összes , **valós első fajú hibája** (α) magasabb, mint 0,05
 - Több szempontos ANOVA esetében kölcsönhatások is vizsgálhatók.
- A tudományos irodalom reprodukálhatósági krízisének egyik fontos oka:

a rejtett vagy tudatlan **hibahalmozás** a szignifikancia utáni hajszában

Megjegyzés: Az ANOVA és a szigorúbb többszörös összehasonlító módszerek ekvivalensek, azaz a Scheffé vagy a Tukey féle HSD módszerek helyettesíthetik (feleslegessé teszik) az egy szempontos ANOVÁ-t.

A négyzetes összeg és az ANOVA

A szórás képlete
(átlagos távolság a minta közepétől)

Korrigált szórás:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

- Az $(x_i - x_{\text{átlag}})$ egy távolság
- Négyzetre emeljük, hogy biztosan + előjele legyen
- A Σ jelzi az összegzést (négyzetes összeg=összes távolság)
- Szórás az átlagos távolság

A távolságok additívek, résztávolságokra, elemekre bonthatók, particionálhatók

Az ANOVA-t a négyzetes összeg **particionálása** teszi lehetővé, olyan részekre, amelyek fontosak

A szóródás és elemzése: kortikoszteron a vérben

6,3

7,3

8,7

9,6

12,7

12,8

13,1

16

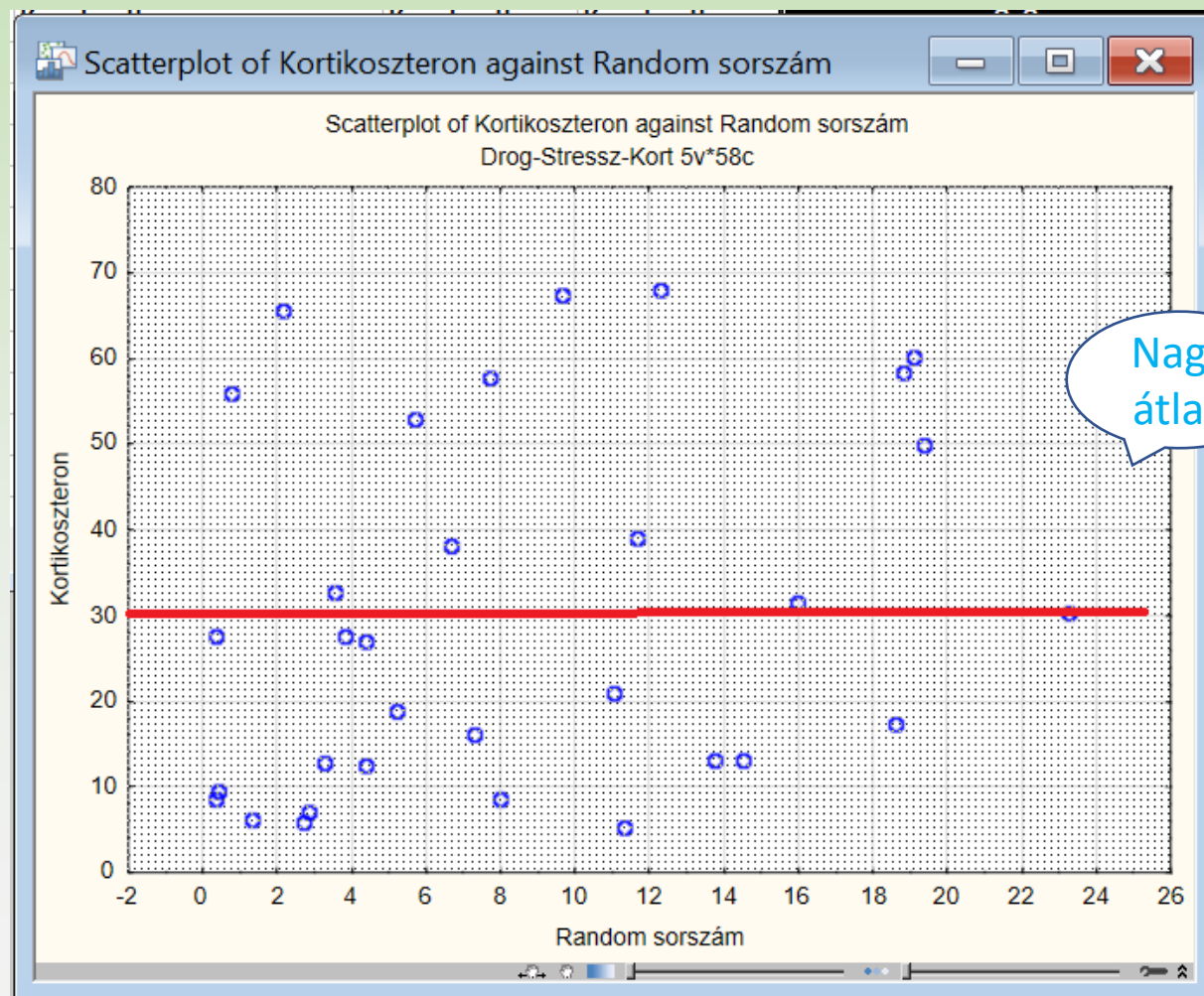
17,0

Descriptive Statistics

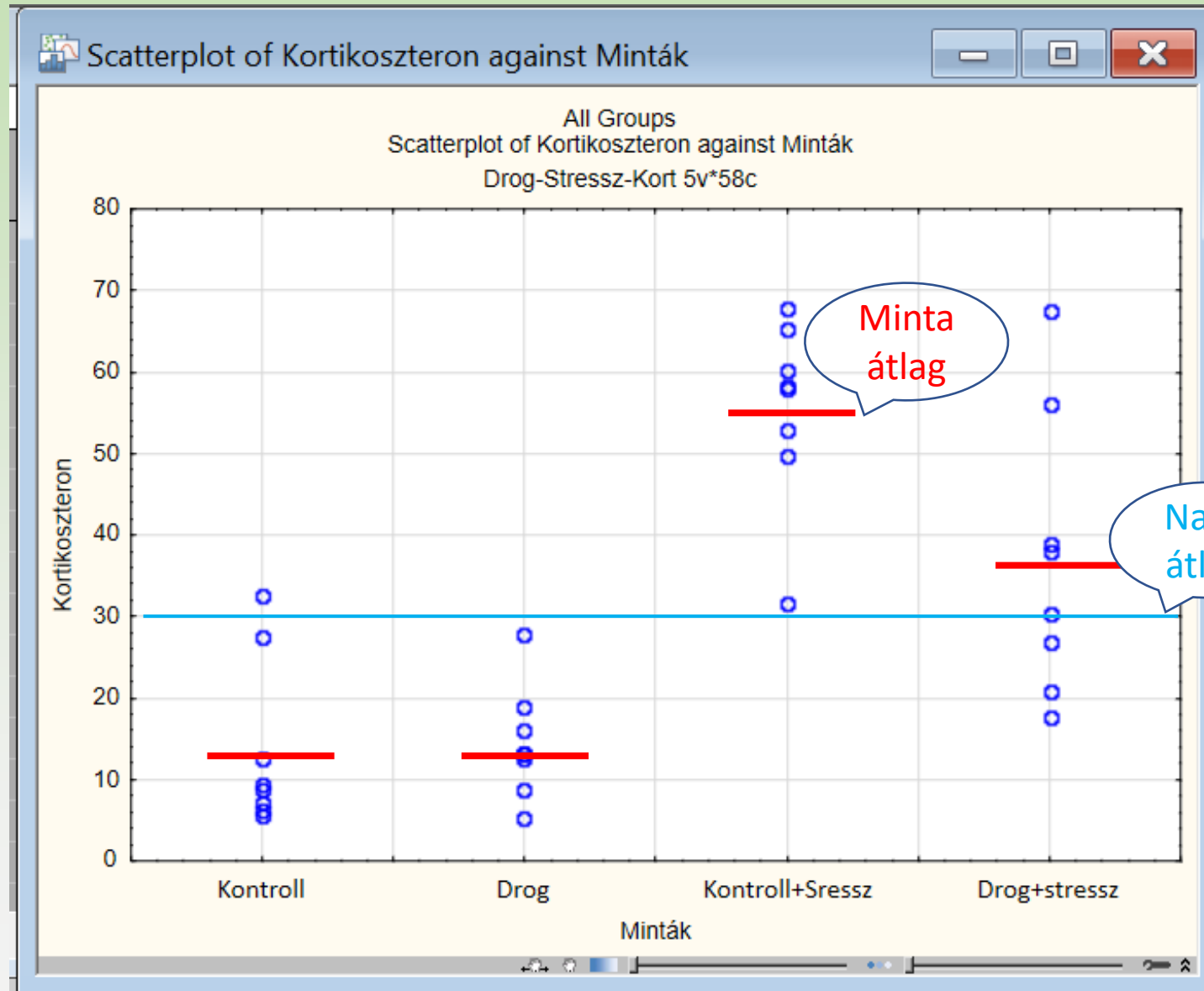
N = 32

Mean = 30,231250

SD = 21,021133



Mintánként szétválasztva



A variancia elemzés menete

(angol rövidítés - analysis of variance - ANOVA)

- A minták normális eloszlásból származnak
- Független minták
- Véletlen minták (randomizálás)
- H_0 : a null hipotézis:
a minták közös sokaságból/populációból származnak ($v_1=v_2=v_3=\dots=v_n$)
- H_A : legalább egy minta egy másik sokaságból származik
- *A null hipotézis következménye:*
 $s_1^2=s_2^2=s_3^2=\dots=s_n^2$
azaz a varianciák homogenitási feltétele (homoszcedaszitás)
- A mintákból két független becslést (s_1^2 és s_2^2) készítünk a populáció varianciájára (σ^2)
- A két variancia becslésnek a hányadosa az $F_{1,2}$ eloszlást követi ($F_{1,2} = s_1^2/s_2^2$)
- Ha a minták egy sokaságból valók (a null hipotézis igaz), akkor $F_{1,2}$ eloszlásának várható értéke $v(F_{1,2}) = 1$
- A tesztstatisztika $F_{1,2} = s_1^2/s_2^2$
- Ha a tesztstatisztika \geq mint az $F_{1,2}$ kritikus értéke ($p < 0,05$), akkor elvetjük a nullhipotézist
- *Ha elvetettük a null hipotézist*, akkor megkeressük, mely csoportokra mondhatjuk ki, hogy nem egy eloszlásból származnak?
- Előre tervezett (a priori), vagy utólagos (a posteriori) összehasonlításokat végzünk

Egy szempontos ANOVA tábla

Forrás	sz.fok (df)	négyzetes összeg	variancia	F	P
A kezelés	$i-1$	Q_A (SS_A)	s^2_A (MS_A)	s^2_A/s^2_b	0,...
Mintákon belül	$i(n-1)$	Q_b (SS_{within})	s^2_b (MS_{within})		
Összes	$in-1$	$Q_{összes}$ (SS_{total})	$S^2_{összes}$		

i – a kezelések száma

n – a megfigyelések száma (mindegyik mintában azonos)

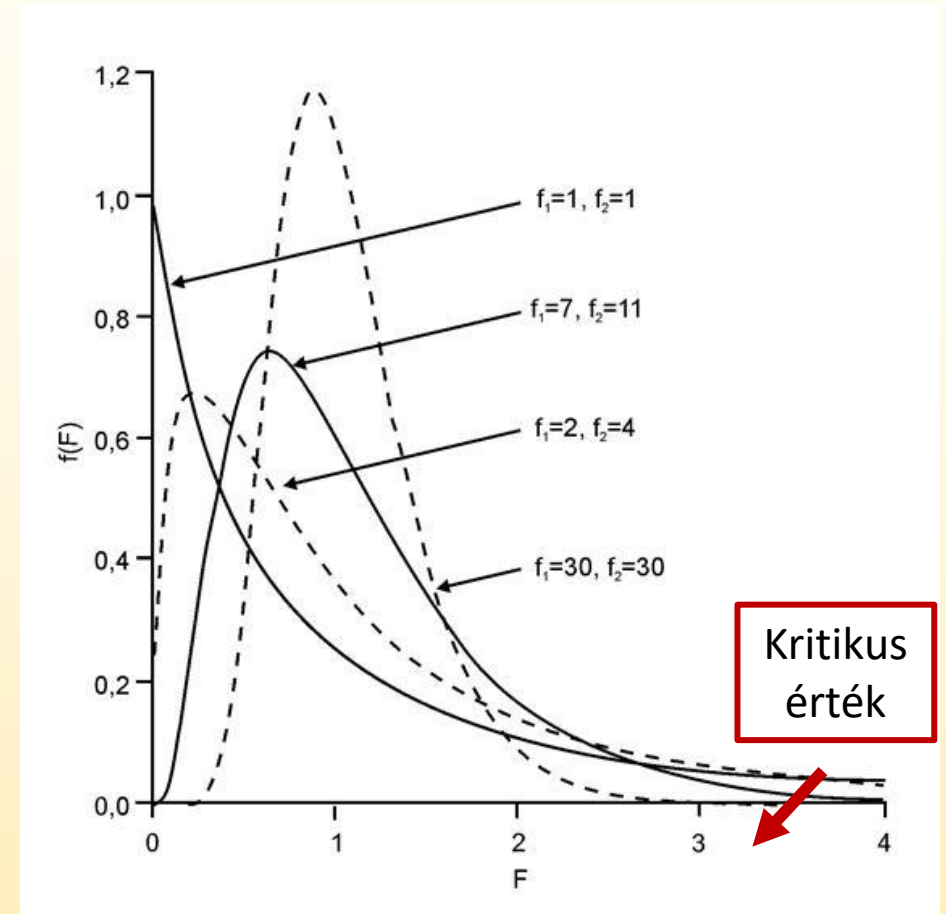
négyzetes összeg= Sum of Squares (SS)

variancia=Mean Squares (MS), (SS_{within})

másképpen (SS_{error}), (MS_{within})

másképpen (MS_{error})

A Fisher–Snedecor (F) eloszlás



Normális eloszlású mintákból képzett négyzetösszegekből számolt varianciák (átlagolt távolságok) hányadosa

$$F_{(m,n)} = s_{1(m)}^2 / s_{2(n)}^2$$

Két- és többszemponos ANOVA

A kezelések osztályozása

- Ha *legalább két féle* beavatkozást (kezelést) vizsgálunk és azokat *egymással kombinálva is alkalmazzuk*, akkor
 - több szempontos, vagy más néven
 - több utas elemzést végzünk (two way ANOVA, three way ANOVA, stb.)
- Az egyes szempontoknak megfelelő kezeléseket minden vizsgálati alanyon úgy alkalmazzuk, hogy minden alany kapjon
 - egy kezelést az 1. szempont szerint és
 - egy kezelést a 2. szempont szerint
 - és így tovább, ha több szempont van
 - és minden kezelést kiosztunk
- A kezelések kategorikus változók, faktoroknak is nevezik

Miért tervezzünk többszemponos ANOVA elrendezést?

- A kezelések *kölcsönhatása* is vizsgálható, a kezelések (fő)hatásai mellett
- Ha teljesülnek a feltételezések, akkor több kérdés vizsgálatára ez az optimális *hatékonyságú* eljárás
- Jobban véd a véletlen okozta tévedésektől, mint az egyszerűbb vizsgálatok sorozata
 - *Közös becslés*, nagyobb szabadságfokkal adható *a véletlen hibára*, a populáció varianciájára
 - Közös elsőfajú hiba használható,
 - Többes összehasonlító eljárások állnak rendelkezésre
 - Több féle kérdés és összehasonlítás lehetséges, mint az egy szempontos ANOVA esetében

ANOVA modellek

$$x_{ij} = M + A_i + \xi_{ij}$$

$$x_{ijk} = M + A_i + B_j + AxB_{ij} + \xi_{ijk}$$

$$x_{ijkl} = M + A_i + B_j + C_k + AxB_{ij} + AxC_{ik} + BxC_{jk} + AxBxC_{ijk} + \xi_{ijkl}$$

- Ahol: i, j, k, l jelöli azt, hogy a többes előfordulásból melyikről beszélünk
- x_{ijkl} = Az egyes megfigyelések értéke (például $x_{2,5}$ a második csoportban az 5. megfigyelés
 - Az utolsó index a csoporton *belüli* mintaelemeken fut végig
- M = nagytárg
- A, B, C = a kezelések szempontjai, amin belül 2, vagy több kezelési szint lehet (i darab, j darab, k darab)
- $A \times B$ jelöli az A és B szempontba sorolt kezelések kölcsönhatásait
- ξ (kszi) jelzi a véletlennek tulajdonítható, normál eloszlású szóródás változóját (hibavariancia)

Elrendezések és szempontok

Egy minta



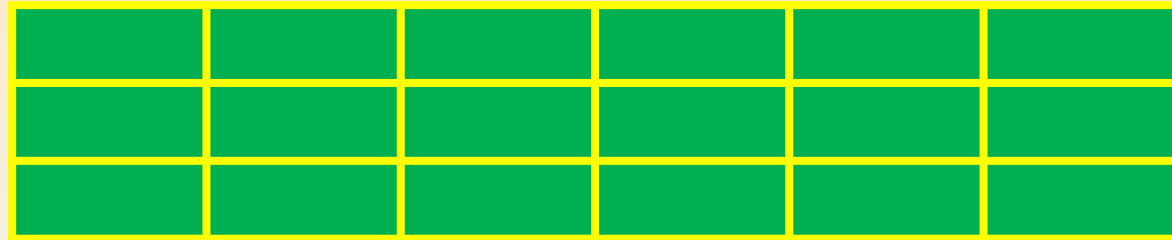
Két minta



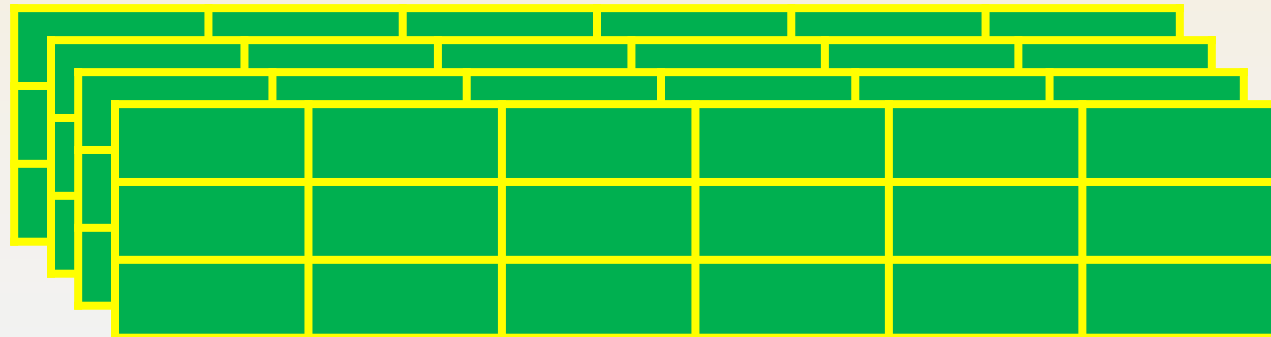
Egy szempont (1x6)



Két szempont (3x6)



Három szempont (3x6x4)



A négyzetes összeg és annak felbontása

- A minta elemek szóródásának vizsgálata során először az egyes négyzetes eltéréseket, majd az összegzett négyzetes eltéréseket vizsgáljuk.
Az "átlagos" négyzetes eltérés a variancia, ennek négyzetgyöke a szórás (standard deviáció).
- A csoportosítási komponens négyzetes összege tovább particionálható, **felbontható (additív) komponensekre**.
- A mintaelemekből számított teljes négyzetes összeg olyan összeadandókból áll, amelyek egyes tagjai a szóródást létrehozó **különbéle tényezőkről**, "okokról" tájékoztatnak.
- Az átlagolt négyzetes összegek (varianciák) nem additívak, hanem súlyozottan átlagoltak.

A négyzetes összeg összetevői három szempont esetén (illusztráció)

Az A szempont szóródása

A B szempont szóródása

A C szempont szóródása

A szempontok (A, B, C)
kölcsönhatásainak (4 db!)
szóródása

A véletlen okozta szóródás

Két szempontos ANOVA modellje

$$x_{ijk} = \text{Nagyátlag} + A_i + B_j + (A \times B)_{ij} + \xi_{ijk}$$

(ahol $(A \times B)_{ij}$ az A_i és B_j kezelések interakciója)

i darab kezelés az A szempont szerint,

(úgy mondjuk i -ik szintje A -nak)

j darab kezelés a B szempont szerint,

kezelésenként (cellánként ugyanannyi eset) n megfigyelés

Feltételezések

1. A mérések **normális** populáció(k)ból származnak
2. A megfigyelések egymástól **függetlenek**.
3. A mérések szórásai nem különbözőek

Hipotézis(ek)

$H_0: A_i = B_j = (A_i B_j) = 0, \mu(\xi_{ij}) = 0$, minden i -re és j -re

$H_A: A_i, B_j, (A_i B_j) \neq 0, \mu(\xi_{ij}) = 0$, legalább egy i -re vagy j -re

Itt a két szempont kezeléseit egymástól függetlenül valósítjuk meg.

Minden lehetséges kombinációt alkalmazunk.

Két szempontos ANOVA tábla

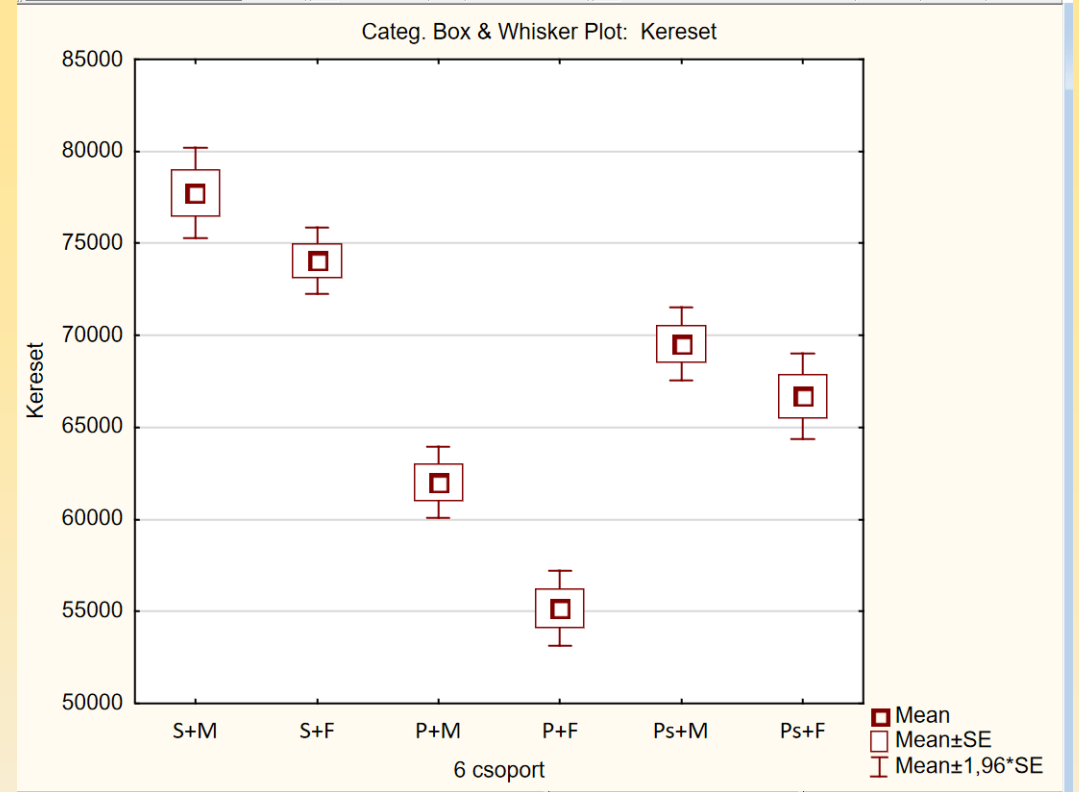
Forrás	sz.fok(df)	Négyzetes összeg	variancia	F	P
A kezelés	$i-1$	Q_A (SS_A)	s^2_A (MS_A)	s^2_A/s^2_b	0,.....
B kezelés	$j-1$	Q_B (SS_B)	s^2_B (MS_B)	s^2_B/s^2_b	0,.....
AxB interakció	$(i-1)*(j-1)$	Q_{AB} (SS_{AB})	s^2_{AB} (MS_{AB})	s^2_{AB}/s^2_b	0,.....
Mintákon belül	$ij(n-1)$	Q_B (SS_{within})	s^2_b (MS_{within})		
Összes	$ijn-1$	$Q_{összes}$ (SS_{total})	$S^2_{összes}$		

Példa, hogyan lehet sok csoportos kísérleteket tervezni?



Egyszerű két szempontos ANOVA – példa

- Jim Frost (<https://statisticsbyjim.com/anova/two-way-anova-excel/>)
 - Excelben is megoldható, elolvasható J. Frostnál
- Vizsgálati cél: Foglalkozás és nem hatása a keresetre (USA)
- Függő változó: éves kereset USD-ben
- Kategorikus változók: 3 foglalkozás, férfi/nő, n=20 csoportonként
 - Statisztika, Politikatudomány, Pszichológia | Male, Female
- 3x2-es elrendezés, 6 csoport, egyenlő elemszámmal
- Adatok elrendezése: oszlopok – sorok
2 független változó, egy függő változó, összesen 6 x 20=120 sorban



2-Way Tables of Descriptive Statistics (Munk N=120 (No missing data in dep. var. list))			
6 csoport	Kereset Means	Kereset N	Kereset Std.Dev.
S+M	77743,38	20	5551,443
S+F	74074,69	20	4116,009
P+M	62015,98	20	4415,044
P+F	55191,76	20	4654,896
Ps+M	69539,85	20	4539,262
Ps+F	66694,82	20	5329,962
All Grps	67543,41	120	8845,605

2 x 3 ANOVA, foglalkozás, nem, keresetek

VA-2 - Munka1

	Munka1		
	Foglalkozás	Nem	Kereset
1	Statisztika	Male	78505
2	Statisztika	Male	76269
3	Statisztika	Male	66658
4	Statisztika	Male	78026
5	Statisztika	Male	83485
6	Statisztika	Male	70941
7	Statisztika	Male	71752
8	Statisztika	Male	69552
9	Statisztika	Male	74773
10	Statisztika	Male	82246
11	Statisztika	Male	75746
12	Statisztika	Male	76814
13	Statisztika	Male	80794
14	Statisztika	Male	80811
15	Statisztika	Male	83562
16	Statisztika	Male	86084
17	Statisztika	Male	71101
18	Statisztika	Male	84664
19	Statisztika	Male	80979
20	Statisztika	Male	82104
21	Statisztika	Female	71267
22	Statisztika	Female	79020

Munka1

General ANOVA/MANOVA: Munka1 in Jim Frost -ANOVA-2

Quick

Type of analysis:

- One-way ANOVA
- Main effects ANOVA
- Factorial ANOVA**
- Repeated measures ANOVA

Use Factorial ANOVA to analyze the higher-order interactive effects of multiple categorical independent variables (factors).

Specification method:

- Quick specs dialog**
- Analysis Wizard
- Analysis syntax editor

Multiple dependent variables can be specified for any type of analysis.

OK

Cancel

Options

Open Data

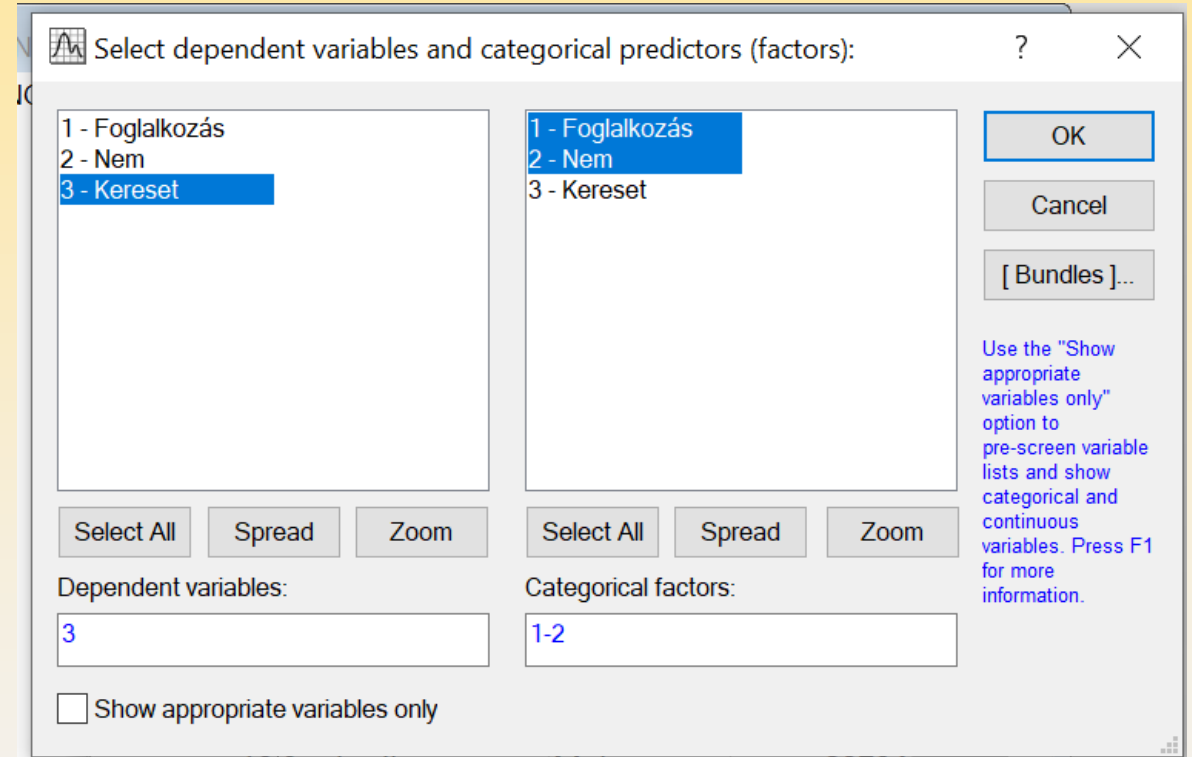
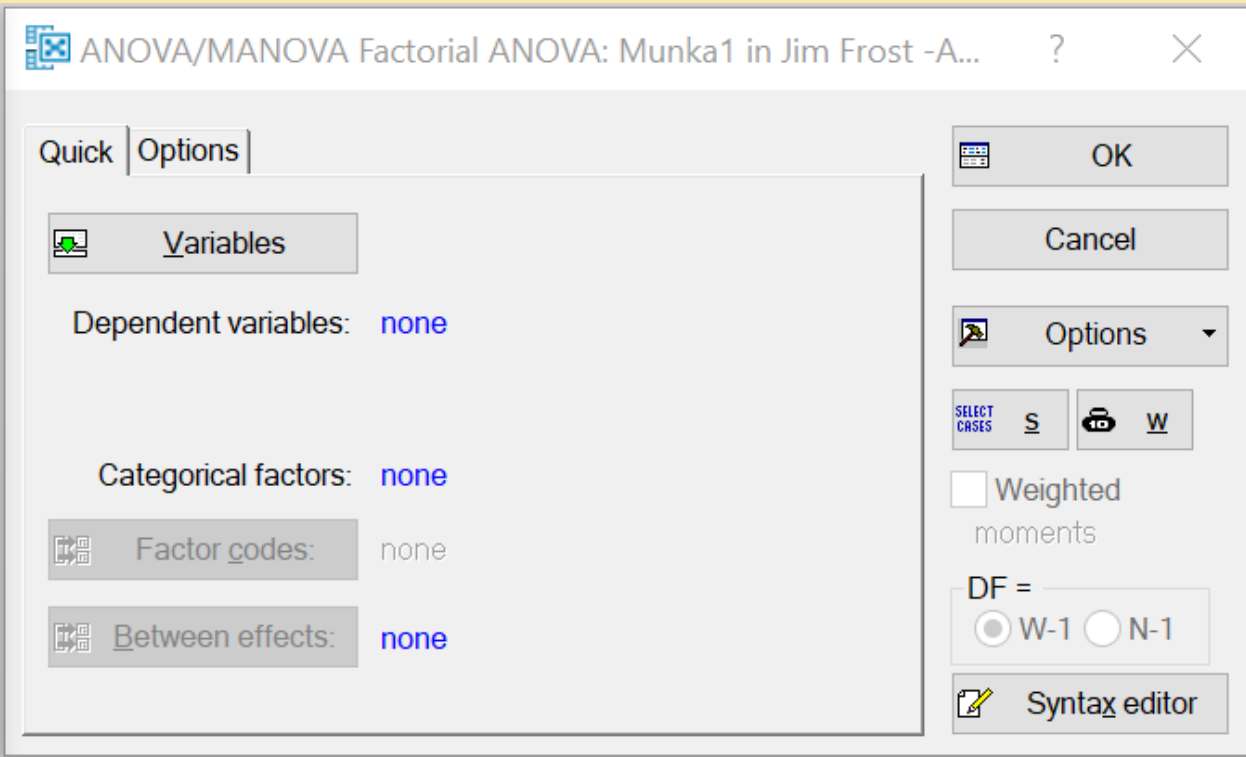
SELECT CASES

Weighted moments

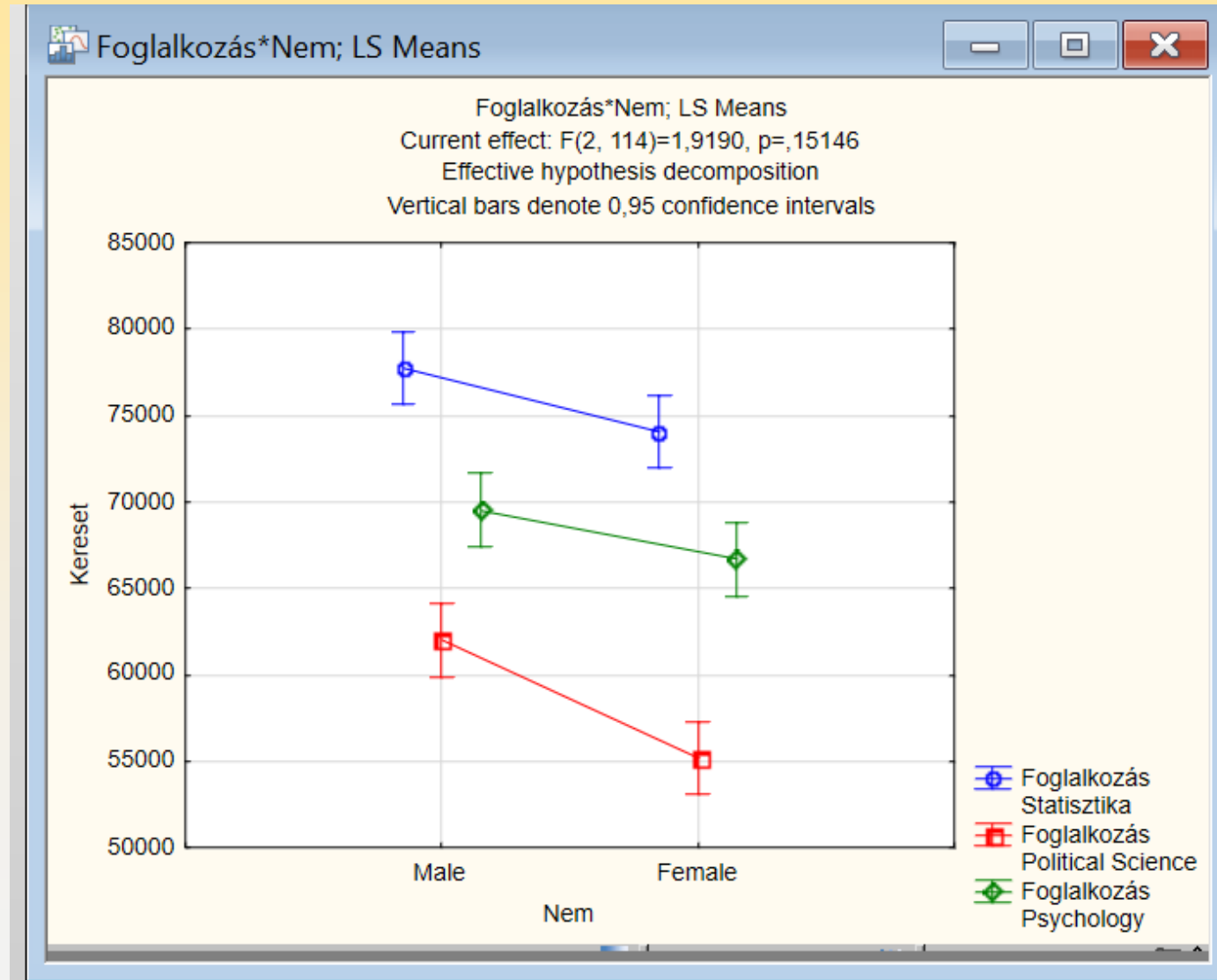
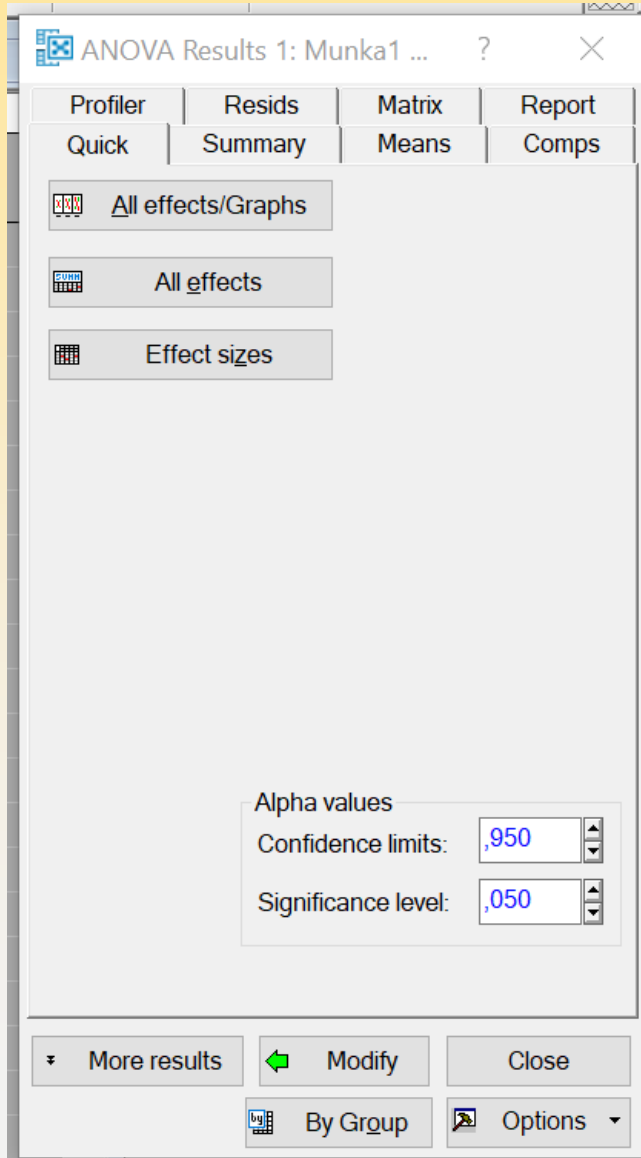
DF =

W-1 N-1

2 x 3 ANOVA, specifikálás



2 x 3 ANOVA, eredmények - 1



2 x 3 ANOVA, eredmények - 2

Data: Univariate Tests of Significance for Kereset (Munka1 in Jim Frost -ANOVA-2) (5v ...)

Univariate Tests of Significance for Kereset (Munka1 in Jim Frost -ANOVA-2)
Sigma-restricted parameterization
Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	5,474535E+11	1	5,474535E+11	23813,70	0,000000
Foglalkozás	6,009141E+09	2	3,004570E+09	130,70	0,000000
Nem	5,930022E+08	1	5,930022E+08	25,80	0,000001
Foglalkozás*Nem	8,823224E+07	2	4,411612E+07	1,92	0,151463
Error	2,620748E+09	114	2,298902E+07		

Data: Levene's Test for Homogeneity of Variance...

Levene's Test for Homogeneity of Variances (Mur
Effect: "Foglalkozás"*Nem
Degrees of freedom for all F's: 5, 114

	MS Effect	MS Error	F	p
Kereset	5414251	7010587	0,772296	0,571633

Data: Newman-Keuls test; variable Kereset (Munka1 in Ji...

Newman-Keuls test; variable Kereset (Munka1 in Jim Frost)
Approximate Probabilities for Post Hoc Tests
Error: Between MS = 2299E4, df = 114,00

Cell No.	Foglalkozás	{1} 75909,	{2} 58604,	{3} 68117,
1	Statisztika		0,000113	0,000104
2	Political Science	0,000113		0,000104
3	Psychology	0,000104	0,000104	

2 x 3 ANOVA, konklúzió

- Az ANOVA feltételei teljesülnek
- Nincs interakció a független változók hatásai között
- A nők keresete alacsonyabb, mint a férfiaké
- A foglalkozások között van szignifikáns különbség
- A többszörös összehasonlítás (post hoc) szerint mindegyik foglalkozás keresete különbözik a többiétől

Másik két szempontos ANOVA példa

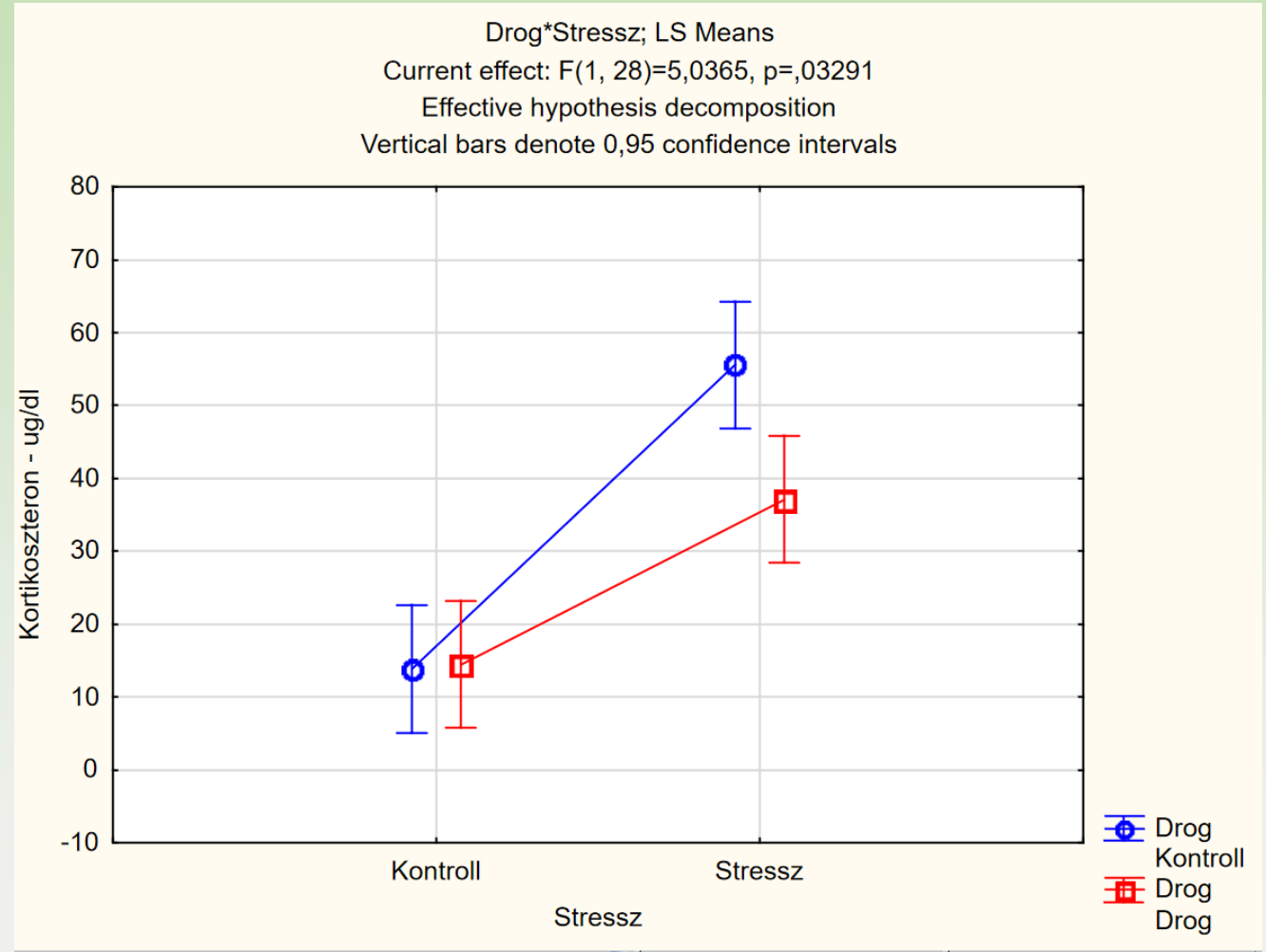
- Vizsgálat célja: stressz hatás és nyugtató *kölcsönhatásának* vizsgálata
- Kategorikus változók:
Két kezelés, mindegyikben két szempont:
 - Stressz – 2 szint: kontroll, stressz
 - Nyugtató – 2 szint: kontroll, nyugtató
- 2x2-es elrendezés - 4 csoport
- A függő változó:
 - plazma kortikoszteron szint ($\mu\text{g/dl}$)
 - 60 perccel a stressz után
- Statisztikai elrendezés: 2 szempontos ANOVA

Patkány plazma kortikoszteron ($\mu\text{g/dl}$) stresszben (n=8)

	Kontroll	Stressz
Kontroll (oldószer)	9,6	58,0
	27,5	53,0
	5,8	65,5
	12,8	58,3
	6,3	60,3
	32,7	49,8
	7,3	31,5
	8,7	68,0
Nyugtató	12,7	30,4
	27,7	20,9
	19,0	39,0
	8,7	27,0
	16,0	67,5
	13,1	38,2
	5,4	17,6
	13,1	56,0

A példát elemezzük

2 Drog	3 Stressz	4 Kortikoszteron - ug/dl
Kontroll	Kontroll	9,6
Kontroll	Kontroll	27,5
Kontroll	Kontroll	5,8
Kontroll	Kontroll	12,8
Kontroll	Kontroll	6,3
Kontroll	Kontroll	32,7
Kontroll	Kontroll	7,3
Kontroll	Kontroll	8,7
Drog	Kontroll	12,7
Drog	Kontroll	27,7
Drog	Kontroll	19
Drog	Kontroll	8,7
Drog	Kontroll	16
Drog	Kontroll	13,1
Drog	Kontroll	5,4
Drog	Kontroll	13,1
Kontroll	Stressz	58
Kontroll	Stressz	53
Kontroll	Stressz	65,5
Kontroll	Stressz	58,3
Kontroll	Stressz	60,3
Kontroll	Stressz	49,8
Kontroll	Stressz	31,5
Kontroll	Stressz	68
Drog	Stressz	30,4
Drog	Stressz	20,9
Drog	Stressz	39
Drog	Stressz	27
Drog	Stressz	67,5
Drog	Stressz	38,2
Drog	Stressz	17,6
Drog	Stressz	56



A STATISTICA program eredményei

Többszörös összehasonlítás Scheffé módszerével

Univariate Tests of Significance for Kortikoszteron - ug/dl (Drog-Stressz-Kort) (6v by 4c)

Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	29245,71	1	29245,71	201,8809	0,000000
Drog	637,25	1	637,25	4,3989	0,045116
Stressz	8275,41	1	8275,41	57,1245	0,000000
Drog*Stressz	729,62	1	729,62	5,0365	0,032907
Error	4056,25	28	144,87		

Scheffe test; variable Kortikoszteron - ug/dl (Drog-Stressz-Kort) (6v by 4c)

Probabilities for Post Hoc Tests

Error: Between MS = 144,87, df = 28,000

Cell No.	Drog	Stressz	{1}	{2}	{3}	{4}
			13,838	55,550	14,462	37,075
1	Kontroll	Kontroll		0,000003	0,999695	0,006868
2	Kontroll	Stressz	0,000003		0,000004	0,040880
3	Drog	Kontroll	0,999695	0,000004		0,008780
4	Drog	Stressz	0,006868	0,040880	0,008780	

A feltételek teljesülnek-e?
Levene teszt

Levene's Test for Homogeneity of Variances (Drog-Stressz-Kort) (4v by 3c)

Effect: Drog*"Stressz"

Degrees of freedom for all F's: 3, 28

	MS Effect	MS Error	F	p
Kortikoszteron - ug/dl	93,18242	51,59597	1,806002	0,168979

Összefoglalás

- A két szempontos ANOVA kölcsönhatások vizsgálatára alkalmas
 - Ha a 2x2 ANOVA-ban nincs szignifikáns interakció, akkor nincs szükség páros összehasonlításokra
- Minden szignifikáns ANOVA elemre (fő szempont szintjei, interakció) külön páros összehasonlítás végezhető
- Számos ANOVA modellre van kidolgozott statisztikai módszertan
 - Párosított – ismétléses tervek
 - Randomizált blokkok
 - Kovariancia elemzés – segédváltozó regressziójával